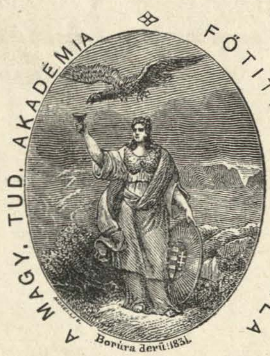
A MAGY. TUD. AKADÉMIA FŐTITKÁRI HIVATALA
Borúra derű: 1831.

ÉRTEKEZÉSEK
A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI
SZABÓ JÓZSEF
OSZTÁLYTITKÁR.

XIV. KÖTET. 1. SZÁM. 1887.

A DINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK JELENTÉSÉRŐL.

KŐNIG GYULA
LEV. TAGTÓL.

(Előterjesztette a M. T. Akadémia III. osztályának ülésén 1886. ápr. 18-án.)

Ára 30 kr.

BUDAPEST.
KIADJA A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.
1887.

Eddig külön megjelent

ÉRTEKEZÉSEK

a mathematikai tudományok köréből.

Első kötet. — Második kötet. — Harmadik kötet. — Negyedik kötet.
Ötödik kötet.

Hatodik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén I. rész. 1871—1873. Ára 20 kr. — II. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén. II. rész. 1874—1876. Ára 20 kr. — III. Az 1874. V. (Borelly-féle) Üstökös definitiv pályaszámitása. Közlik *dr. Gruber Lajos* és *Kurländer Ignácz* kir. observatorok. 10 kr. — IV. *Schenzl Guido.* Lehajlás meghatározások Budapesten és Magyarország délkeleti részében. 20 kr. — V. *Gruber Lajos.* A november-havi hullócsillagokról 20 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1877-ik évben. III. Rész. Ára 20 kr. — VII. *Konkoly Miklós.* A napfoltok és a napfelületének kinézése 1877-ben. Ára 20 kr. — VIII. *Konkoly Miklós.* Mercur átvonulás a nap előtt. Megfigyeltetett az ó-gyallai csillagdán 1878. május 6-án 10 kr.

Hetedik kötet.

I. *Konkoly Miklós.* Mars felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagdán az 1877-iki oppositió után. Egy táblával. 10 kr. — *Konkoly Miklós.* Álló csillagok szinképének mappirozása. 10 kr. — III. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1878-ban IV. rész. Ára 10 kr. — IV. *Konkoly Miklós.* A nap felületének megfigyelése 1878-ban ó-gyallai csillagdán. 10 kr. — VI. *Hunyady Jenő.* A Möbius-féle kritériumokról a kúpszeletek elméletében 10 kr. — VI. *Konkoly Miklós.* Spectroscopicus megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 10 kr. — VIII. *Dr. Weinek László.* Az instrumentális fényhajlás szerepe és Vénus-átvonulás photographiai felvételénél 20 kr. — IX. *Suppan Vilmos.* Kúp- és hengerfelületek önálló ferde vetitésben. (Két táblával.) 10 kr. — X. *Dr. Konek Sándor.* Emlékbeszéd Weninger Vincze l. t. fölött. 10 kr. — XI. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1879-ben. 10 kr. — XII. *Konkoly Miklós.* Hullócsillagok radiatio pontjai, levezetve a magyar korona területén tett megfigyelésekből 1871—1878. végéig 20 kr. — XIII. *Konkoly Miklós.* Napfoltok megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1879-ben. (Egy tábla rajzzal.) 30 kr. — XIV. *Konkoly Miklós.* Adatok Jupiter és Mars physikájához, 1879. (Három tábla rajzzal.) 30 kr. — XV. *Réthy Mór.* A fény törése és visszaverése homogén isotrop átlátszó testek határán. Neumann módszerének általánositásával és bővitésével. (Székf. ért.) 10 kr. — XVI. *Réthy Mór.* A sarkitott fényrezgés elhajlító rács által való forgatásának magyarázata, különös tekintettel Fröhlich észleteire. 10 kr. — XVII. *Szily Kálmán.* A telitett gőz nyomásának törvényéről. 10 kr. — XVIII. *Hunyadi Jenő.* Másodfoku görbék és felületek meghatározásáról. 20 kr. — XIX. *Hunyady Jenő.* Tételek azon determinánsokról, melyek elemei adjungált rendszerek elemeiből vannak componálva. 20 kr. — XX. *Dr. Frölich Izor.* Az állandó elektromos áramlások elméletéhez. 20 kr.

ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA.

TIZENNEGYEDIK KÖTET.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

BUDAPEST.

1892.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA.

TARTALOM.

// ÉRTEKEZÉSEK

A MATHEMATIKAI TUDOMÁNYOK KÖRÉBŐL.

KIADJA A MAGYAR TUD. AKADÉMIA.

A III. OSZTÁLY RENDELETÉBŐL

SZERKESZTI

SZABÓ JÓZSEF

OSZTÁLYTITKÁR.

A DINAMIKA ALAPEGYENLETEINEK JELENTÉSÉRŐL.

KŐNIG GYULA

l. tagtól.

(Előterjesztette a III. osztály ülésen, 1887. április 18.)

A mozgás általános differencziálegyenleteinek kétségtelenül tapasztalati, vagy jobban — minthogy tartalmuk a tapasztalat segítségével soha ki nem meríthető — axiomaszerű jellegük van. Magukban foglalják az erő és a kényszer definiczióját. Az erő pedig nem más, mint a tünemények leírása és osztályozása czéljából bevezetett természettudományi, illetőleg ismerettani segédfogalom ; és, a mit kevésbé szoktunk hangsúlyozni, a kényszer is ilyen. Bármily szerkezet létesítse is a mozgásnak ama módosítását, melyet kényszermozgásnak nevezünk, ennek következtében nemcsak a theoretikus kényszererők lépnek föl, hanem a tünemény teljes leírására még más, *akadály*képen működő erők (súrlódás stb.) fölvétele is szükséges. A kényszer- és akadályerők szétválasztása pedig szintén csak a theoria segédeszköze.

A tudományos mechanikának régi törekvése, a mozgás alapegyenleteinek tartalmát visszavezetni egyszerűbb törvényekre, a mechanikának ú. n. elveire, melyeket nemcsak tisztán mathematikai, hanem egyszersmind természettudományi, vagy helyesebben mondva, ismerettani szempontból is lehet interpretálni. Ily törvénynek tekintendő a LAGRANGE-féle mozgási egyenletek rendszere is. De míg ez általánosságban $3n$ egymástól független állítást foglal magában, nincs kizárva annak lehetősége, hogy ezeknek helyét oly elv pótolja, mely kevesebb egymástól független állítást foglal magában és így az illető pontrendszer mozgásának legalább bizonyos tekintetben egyszerűbb leirását eszközli. Erre természetesen szükséges, hogy az ily elvből LAGRANGE egyenletei levezethetők legyenek. Az állítások (egyenletek) számának leszállítására maximum-minimum föltételek bevezetése kinálkozik alkalmas módszer gyanánt. Az összes egyenletek természetesen egy ily föltételből is levezethetők; ha p. az x_i'', y_i'', z_i'' függvenyek oly meghatározását követeljük, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}\left((m_i x_i''-X_i)^2+(m_i y_i''-Y_i)^2+(m_i z_i''-Z_i)^2\right)$$

minimum legyen. De ez — ép úgy mint a virtualis sebességek elve — ama $3n$ egyenletnek csak formai egyesítése; a miért is a következőkben ezektől eltekintünk.

A mennyiben eddig ily elvek, melyek a mozgásnak más jellemző és általános tulajdonságát fejezik ki, eddig fölállíttattak, csakis a mozgások bizonyos nemeire vonatkoznak, azaz csak a működő erők természetére vonatkozó speczialis föltevések mellett igazak, és szintúgy a kényszernek csak egyszerűbb eseteit karolják föl, midőn t. i. a mozgó pontok helyeit megszorító föltételek az időtől függetlenek. Ezekkel szemben e lapokban a mozgásnak oly általános törvényeit állítom föl, melyeknek fogalmazása a mechanika u. n. elveihez hasonló ugyan, de a működő erők és a kényszerre vonatkozó minden speczialis föltevéstől független, azaz minden mozgásnál érvényes.

Ezen általános törvények kellő fogalmazására azonban néhány a használt mechanikai fogalmakkal közel rokonságban álló, de mégis új fogalmat kellett bevezetnem. Ezeknek részletesebb elemzésénél a jelen alkalommal csupán annyira szorítkoztam, a mennyi előbb kijelölt czélom elérésére szükséges volt.

I. ELŐZETES MEGÁLLAPÍTÁSOK.

1. Valamely n tömegpontból álló rendszernek egy-egy *mozgási állapotát* jellemezzük, ha megadjuk az időkoordináta (t) egy-egy értékének megfelelőleg az egyes pontok* koordinátáit (x_i, y_i, z_i) és sebességi komponenseit (x'_i, y'_i, z'_i) valamint végre az egyes pontok tömegét (m_i). Ha a tömegek állandók, akkor e fölsorolásuk a mozgás állapotjelzői közt fölösleges; ámbár azonban erre a föltevésre az eddig észlelt tünemények vizsgálatában még nem volt szükség, nincs kizárva annak lehetősége, hogy a tömegek bizonyos meghatározott módon változnak az idővel vagy még általánosabban a rendszer mozgási állapotával. Ép ezért megjegyzem itt egyszer mindenkorra — noha erre különös súlyt nem fektetek — hogy a következő tárgyalások a tömegekre vonatkozó bárminemű ily általánosabb föltevésre is vonatkoznak, azaz hogy mindenütt m_i a t, x_i, y_i, z_i, x'_i, y'_i, z'_i tetszőleges, de meghatározott (pozitiv értékű) függvényének is tekinthető.

Valamely mennyiségről röviden azt mondjuk, hogy *a mozgási állapot függvénye*, ha ez a $t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x'_i, y'_i, z'_i, \ldots$ függvénye; az m_i tömegeknek külön fölemlítése mellőzhető, mert ezek vagy állandók vagy szintén a fölsorolt mennyiségekből meghatározhatók.

Ha az egyes pontok gyorsulási komponensei meg vannak adva, mint a mozgási állapot függvényei:

* Az áttekintés végett kezdettől fogva közönséges derékszögű koordinátarendszert használok; de megjegyzem mindjárt itt, hogy az összes tárgyalások a helymeghatározás módjától egyáltalában függetlenek. Ily általános koordináták használatánál a képletek természetesen bonyolódnak, a miért is ezeknek bevezetését mellőztem.

$$x_i'' = \varphi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots),$$
$$y_i'' = \psi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots),$$
$$z_i'' = \chi_i(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots);$$

és ezenkívül a rendszer *egy* mozgási állapota ismeretes, ebből (a differencziálegyenletek megoldásával) a bármely t időnek megfelelő mozgási állapot kiszámítható, és a rendszer helyváltozása a *kinematika* szempontjából teljesen le van írva. Ily módon történik a mozgási tüneményeknek egy első összefoglalása általános szempontok alá, a mennyiben mintegy egy osztályba foglaljuk össze mindazon mozgásokat, melyek ugyanazon differencziálegyenletek értelmében történnek, míg az egy külön megadott mozgási állapot, a melyet *kezdő állapot*nak szoktunk nevezni, bármilyen lehet.

2. Sokkal általánosabb szempontokra emelkedik a *dinamika* az által, hogy a mozgási állapot változását nem a most leírt módon eszközli, hanem teszi ezt az *egyes pontokra ható erők,* azaz szintén nagyságuk és irányuk által adott mennyiségek segítségével, melyek tehát szintén komponenseik, $(\ldots X_i, Y_i, Z_i, \ldots)$ segítségével jellemezhetők, hol e komponensek mindegyike ismét a pillanatnyi mozgási állapot, azaz $t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots$ függvénye. Bárhogy magyarázzuk is természettudományilag ezen erők föllépését és hatását, az, hogy ezen erők a mozgási állapot változásának okai, vagy a mint ezt többnyire szoktuk mondani, a gyorsulás okai, mathematikai fogalmazásban annyit jelent, hogy a gyorsulások és az erők bizonyos általános törvényszerű kapcsolatban állanak, melyek értelmében az $\ldots X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ értékeiből az $\ldots, x_i'', y_i'', z_i'' \ldots,$ értékei kiszámíthatók és megfordítva, azaz általánosságban például:

$$x_i'' = f(t, \ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, x_i', y_i', z_i', \ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots),$$

és úgy tovább.

Hogy minő ezen összefüggés a gyorsulás és erő komponensei között, azt közvetetlenül megadják axiomaképen a dinamika alapegyenletei, a LAGRANGE-tól származó alakokban. A dinamika ezen alaptörvényének ily tisztán mathematikai fogalmazásával, melyből azt, a mit fizikai jelentésnek szoktunk nevezni, a bonyolódottabb esetekben alig olvasható ki, a tudomány fejlődése nem elégedhetett meg. A dimanikának úgynevezett általános *elveit* kutatták, melyeknek föladatát talán következőkép körvonalozhatjuk.

Ha mindazon mozgásokat, melyeknél a gyorsulási komponensek, a mozgási állapot és az erőkomponensek bárminő meghatározott függvényei, egyelőre mind mint lehetségeseket tekintetbe veszszük, a dinamika egy-egy általános elve vagy alaptörvénye a valóban történő mozgásnak oly jellemző tulajdonságát adja meg, mely ennek a többi lehetséges mozgások sorából való kiválasztására szükséges és elegendő.

Ily általános értelemben alapelv a virtuális sebességek elve, ámbár ez formai jellegére és tartalmára nézve még nagyon közel áll a differencziálegyenletek direkt fölállításához; ilyen a legkisebb akczió elvének két különböző alakja, a Maupertuis-Jacobi és a Lagrange-Hamilton-féle alak.* Hogy ezen utóbbiak azonban nem oldják meg általánosan a föltett kérdést, nem szorúl bővebb magyarázatra. Nem csak a föllépő erőkre vonatkozó szűkebb föltevésekből indulnak ki, hanem az úgynevezett kényszermozgásnak csak azon eseteit karolják föl, midőn tisztán a pontok koordinátai között az időtől is független föltétel van adva.

Ily valóban általános dinamikai elv fölállításával foglalkozik e dolgozat, mely elv egyszersmind egyszerű végfogalmazásában kielégiti azon követeléseket, melyeket természetfölfogásunk az alaptörvény nevével illetendő tételhez köt; sőt meg van, természetesen új fogalmak bevezetésével, az a maximum-minimum tétel alakja, melylyel ma nem akarjuk ugyan már a természet czélszerűségét bizonyitani, de mely mégis a tünemény leírását mondhatni tetszetősbé teszi.

3. Az ily alaptörvény tartalmának elemzésében az első kérdés természetszerűleg oda irányúl, vajjon vannak-e az általa leirt mozgásnak *invariáns* tulajdonságai, azaz — mathematikai fogalmazásban — vajjon van-e a pillanatnyi mozgási állapot oly függvénye, melynek értéke mindig ugyanaz. Ha φ e függvény jele és $t^0, \ldots, x_i^0, y_i^0, z_i^0, \ldots, x_i'^0, y_i'^0, z_i'^0, \ldots$ egy bizonyos

---

* Lásd Helmholtz, Berliner Sitz.-Ber. 1887. és Mayer, Leipz. Ber. Nov. 1886.

(kezdő) állapot jelzői, akkor e függvényre nézve volna:

$$\varphi(t,\dots,x_i,y_i,z_i,\dots,x_i',y_i',z_i',\dots) = \varphi(t^0,\dots,x_i^0,y_i^0,z_i^0,\dots,x_i'^0,y_i'^0,z_i'^0,\dots).$$

Hogy *adott* alaptörvény mellett és *adott* erők föllépésénél a pontrendszer mozgásának ily invariáns tulajdonságai vannak; sőt hogy ezeknek ismeretével az egész mozgás ismeretes, az közvetetlenül belátható; mert hiszen, hogy a φ függvény a kifejtett föltételnek megfeleljen, arra szükséges és elegendő, hogy $\varphi = Const.$ a mozgás differencziálegyenleteinek egy első integrálja legyen. Az is világos, hogy adott alaptörvény mellett, valamely φ függvény kielégítheti ama követelést, nemcsak bizonyos meghatározott erőrendszer működése mellett, hanem akkor is, ha az erőrendszert egy bizonyos általánosabb föltételnek megfelelőleg választottuk. Igy p. ha az alaptörvény az ú. n. szabad mozgásé, és az erők ú. n. belső erők, a területek elve vagy a súlypont elve ismét a mozgásnak ily invariáns tulajdonságát fejezi ki.

Itt azonban először azt kérdezzük, vajjon *adott alaptörvény mellett vannak-e a mozgásnak a föllépő erők nagyságától és irányától egészen független ily invariáns tulajdonságai?* Hogy ilyenek általánosságban nincsenek, azt a legegyszerűbb esetek is mutatják. Álljon például e rendszer egy pontból és legyenek a gyorsulások és erők között fönnálló összefüggések:

$$mx'' = X, my'' = Y, mz'' = Z;$$

Ha φ (t, x, y, z, x', y', z'), hol φ-nek nincs identikusan állandó értéke, a mozgási állapottól független volna, kellene, hogy legyen:

$$\frac{1}{m}\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x'}X+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}Y+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}Z\Big)+\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}z'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

az X, Y, Z bárminő függvényei is a mozgási állapotnak. Tehát, minthogy X, Y, Z zérus is lehet, volna

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}x'+\frac{\partial\varphi}{\partial y}y'+\frac{\partial\varphi}{\partial z}z'+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \qquad \text{(a.)}$$

és külön

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}X+\frac{\partial\varphi}{\partial y'}Y+\frac{\partial\varphi}{\partial z'}Z=0. \qquad \text{(b.)}$$

De ez utóbbi egyenlet tetszőleges X, Y, Z-re csak úgy állhat fönn, ha $\frac{\partial \varphi}{\partial x'}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y'}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z'}$, identikusan 0; tehát kellene, hogy φ tisztán az x, y, z, t függvénye legyen. De e mellett az (a) csak ugy lehet identitás, ha $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ is 0, azaz ha φ a mozgási állapot jelzőit nem is tartalmazza, vagyis tiszta állandó.

Az alaptörvény bizonyos speciális választásánál azonban létezhetnek ily invariáns függvények. Legyen p. az erők és gyorsulások közötti kapcsolat a következő:

$$mx'' = X - \frac{xX + yYz + Z + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2} x,$$

$$my'' = Y - \frac{xX + Yy + zZ + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2} y,$$

$$mz'' = Z - \frac{xX + yY + zZ + m(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{x^2 + y^2 + z^2} z.$$

Ha e 3 egyenletet x, y, z-vel szorozzuk és összeadjuk, közvetetlenül látni, hogy az X, Y, Z értékeitől függetlenül mindig:

$$xx'' + yy'' + zz'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 = 0;$$

azaz

$$xx' + yy' + zz'$$

most ily invariáns függvénye a mozgási állapotnak. Ugyanily jellegű függvény még, mint a differencziálás közvetetlenül mutatja:

$$\tfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (xx' + yy' + zz')\,t.$$

Ha e függvények állandó értékét $\frac{1}{2}A$ és $\frac{1}{2}B$-vel jelöljük, még látni, hogy

$$x^2 + y^2 + z^2 = At + B;$$

azaz az ama differencziálegyenletek jellemezte mozgásnál a mozgó pont és a koordináták kezdő pontja közötti távolság négyzete az idővel arányosan változik. Nem egészen korrekt kifejezésmód tehát, hogy — mint gyakran olvassuk — amaz egyenletek oly pont mozgását ábrázolják, mely egy adott gömbfölületen kényszerül maradni. Ez csak akkor igaz, ha egy bizonyos (a kezdő) mozgási állapotban $xx' + yy' + zz'$ zérussal egyenlő.

Megjegyzendő még, hogy ama differencziálegyenletek nem használhatók (a jobboldal elveszti számtani értelmét) ha oly mozgási állapotból indulunk ki, melynél $x=0$, $y=0$, $z=0$. De ha nem a differencziálegyenleteket, hanem a mozgás invariáns tulajdonságát veszszük első kiinduló pont gyanánt, ekkor $xx'+yy'+zz'$ mindig 0, és így $x^2+y^2+z^2$ is mindig 0, azaz a pont egyáltalában nem változtathatja helyzetét.

4. E megjegyzés is arra utal, hogy a mozgás alaptörvényének megállapításában először is *a mozgás invariáns tulajdonságai keresendők.* A tapasztalat szerint különböző törvények szerint történik mozgás. Ha az illető mozgásnak nincs invariáns tulajdonsága, *szabad mozgás*nak nevezzük; *kényszermozgás*nak, ha a mozgási állapot bizonyos függvényei ily invariáns jellegüek.

Ha φ_1 és φ_2 ily invariáns jellegű függvények, akkor az F bármely választásánál $F(\varphi_1, \varphi_2)$ is ilyen; a mozgás összes invariáns tulajdonságainak fölsorolásánál tehát az oly

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$$

függvényekre szorítkozhatunk, melyek között nincsen

$$F(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k)=0$$

alakú kapcsolat. Ebből az is következik, hogy (n pontból álló rendszernél) az egymástól független invariáns jellegü függvények száma $6n$-nél nem lehet nagyobb, mert különben a koordináták folytonos változása azaz folytonos mozgás nem létesülhet. Ugyanezen okból nem lehetnek az egyenletek olyanok, hogy a sebességi komponensek eliminácziója után $3n$-nél több független egyenlet maradna a koordináták és az idő közt és úgy tovább.

A mozgás általános alaptörvényének fölállításánál tehát azon feltevésből kell kiindulnunk, hogy kényszermozgás történik, melynél az összes egymástól független invariáns jellegű függvények $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_k$. A szabad mozgás esete ebben mint speczialis eset bennfoglaltatik, ha a φ függvények száma, $k=0$ vagy ha az összes φ függvények mint állandók vannak megadva.

Ama néha kényelmetlen jellemzését a kényszernek, hogy a $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ függvények értéke minden mozgási állapotnál ugyanaz, fölcseréljük még avval, hogy e függvények teljes differencziálhányadosa az idő szerint zérus. E differencziálhányados — a következő oldalon részletesen említett eset kivételével, midőn az invariáns függvény csakis a koordináták és az idő függvénye — a gyorsulási komponensek lineáris függvénye, míg az együtthatók a mozgási állapot függvényei. Ezen egyenletek, melyeket röviden *a kényszer egyenleteinek* nevezünk, a következők:

$$A_{11}x_1'' + B_{11}y_1'' + C_{11}z_1'' + \ldots + A_{i1}x_i'' + B_{i1}y_i'' + C_{i1}z_i'' + \ldots = U_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{1k}x_1'' + B_{1k}y_1'' + C_{1k}z_1'' + \ldots + A_{ik}x_i'' + B_{ik}y_i'' + C_{ik}z_i'' + \ldots = U_k,$$

vagy röviden összefoglalva:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(A_{ij}x_i'' + B_{ij}y_i'' + C_{ij}z_i''\right) = U_j.$$

$$(j = 1, 2, \ldots k)$$

Itt természetesen:

$$A_{ij} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i'},\ B_{ij} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i'},\ C_{ij} = \frac{\partial\varphi_j}{\partial z_i'},$$

$$U_j = \frac{\partial\varphi_j}{\partial t} + \sum_{i=i}^{n}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\varphi_j}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial\varphi_j}{\partial z_i}z_i.$$

A kényszernek közönségesen egyedül tekintetbe vett esete, az, hogy a pontok koordinátái és az idő közt áll fönn egy vagy több

$$\Phi(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, t) = 0$$

alakú egyenlet. A most előadott föltevéseknek ez csak speciális esete, ekkor az oly mozgást vizsgáljuk, melyre nézve:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t},$$

és

$$\Phi(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots t) - \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i'\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right]t$$

a mozgás invariáns tulajdonságait jellemző függvények. Ekkor még az a kivételes dolog történik, hogy a minden egyes Φ-ből képezett két invariáns függvény csak egy kényszeregyenletet szolgáltat. T. i.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_i}x_i'' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_i}y_i'' + \frac{\partial\Phi}{\partial z_i}z_i''\right) + \Psi = 0,$$

hol Ψ részletes alakja közvetetlenül fölírható.

II. NÉHÁNY ÚJ MECHANIKAI FOGALOM BEVEZETÉSE.

5. A megelőzőkben kijelölt czél elérésére néhány új mechanikai fogalom bevezetése szükséges. Ilyen először is a *pontrendszer sebességváltozási*, vagy rövidebben *gyorsulási energiája*, mely elnevezéssel a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2)$$

kifejezést kivánom jellemezni, ha n pontból álló rendszerrel van dolgunk, és e rendszer i-edik pontjának tömege m_i, e pont gyorsulási komponensei x_i'', y_i'', z_i''.

Ha a közönséges megállapítások szerint a

$$\sum_{i=1}^{n} m_i (x_i'^2 + y_i'^2 + z_i'^2)$$

kifejezés (vagy ennek fele, a mi egyre megy) szolgál a mozgási vagy helyváltozás energiájának mérésére, alig szorúl már indokolásra, hogy az előbb fölirt alakot azon «energia» mérésére használjuk, melylyel a sebesség változása vagy a gyorsulás történik. Különben a pontrendszer e gyorsulási energiája egyenesen mint egy másik pontrendszer közönséges (mozgási) energiája ábrázolható. Ha ugyanis oly pontrendszert képzelünk, melyben az i-edik pont koordinátái mindig az előbbi pontrendszer i-edik pontjának sebességi komponensei, akkor az első pontrendszer egy meghatározott mozgásának a második pontrendszernek is meghatározott mozgása felel meg, és az utóbbi pontrendszer mozgási energiája minden egyes időpontban egyenlő az első pontrendszer gyorsulási energiájával.

6. Ugyanazon az úton, melyen a mozgási energiától a gyorsulási energiához jutottunk, a *munka* fogalmából is új fogalmat vezethetünk le. Erre vonatkozólag azonban nehány rövid

előleges megjegyzés szükséges, a mennyiben nem állandó erők esetére a munka definicziója a közönséges tárgyalásokban nem egészen szigorú. Változó erők esetében a Δt időben végzett munka ugyanis csak megközelítőleg definiálható, mely megközelítés hibájától csak akkor szabadulunk, ha a Δt időrészeket minden határon túl kisebbítjük és a munkát összeg, azaz határozott integrál alakjában fejezzük ki. A munka általános értelmezése a Δt időtartamra nézve — ha nem is szokták ezt ily módon kifejezni — valóban a következő:

Ha a Δt időtartam kezdetén az i-edik pontra ható erők X_i, Y_i, Z_i, és ezen idő alatt az i-edik pont koordinátáinak változásai Δx_i, Δy_i, Δz_i, akkor a ható erők átlagos munkája a Δt idő alatt annál pontosabban lesz megadva az

$$\frac{1}{\Delta t}\sum_{i=1}^{n}(X_i\Delta x_i + Y_i\Delta y_i + Z_i\Delta z_i) \times \text{időegység}$$

kifejezés által, minél kisebb a Δt időtartam, átlagos munka alatt értve az időegységben végzett munka nagyságát, ha az időegység alatt végzett munka képződése az idővel arányosan történt volna, azaz úgy hogy egyenlő időkben egyenlő nagyságú munka lett volna kifejtve; az arányossági tényező az lévén, melynél a a Δt időben ugyanazon munkaképzés történik, mint a valóságban. Ez a számtani értelme annak, hogy a dt időddifferencziálnak megfelelő munka elem $\sum(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$. Ha ezután azt mondjuk, hogy *a t időpontban végzett munka* (vagy pontosabban a t időpontban végzett átlagos munka)*

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i) \times \text{időegység}$$

ez rövidebb kifejezése annak, hogy ezen alak a t-től $t+\Delta t$-ig terjedő időtartamnak megfelelő átlagos munkát annál pontosabban fejezi ki, minél kisebb a Δt; mert

$$\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\frac{\Delta x_i}{\Delta t} + Y_i\frac{\Delta y_i}{\Delta t} + Z_i\frac{\Delta z_i}{\Delta t}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i\right)$$

0 lesz, ha lim. $\Delta t = 0$.

---

* Minthogy tévedés *t időpontra* vonatkozó munkánál nem fordulhat elő, az *átlagos* jelző rövidség kedvéért ki is hagyható.

A t időpontban végzett munkának ezen értelmezéséből azután közvetetlenül foly, hogy a t_0-tól t-ig terjedő időben végzett munka

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i) dt$$

Ugyanazt tettük itt, mint midőn a sebesség (az időegységben befutott út) fogalmát átviszszük időtartamról időpontra, a t időpontbeli sebesség szintén annál pontosabban fejezi ki a t-től $t + \Delta t$-ig terjedő időtartamnak megfelelő átlagos (t. i. az időegységre redukált) utat, minél kisebb a Δt.

Ennek megfelelőleg a $\sum_{i=1}^{n} (X_i x'_i + Y_i y'_i + Z_i z'_i)$ kifejezésnek czélszerű lesz külön nevet adnak; legyen ez az erők *sebességi viriálja*. A név indokolására szolgáljon, hogy CLAUSIUS a hasonló alkatú $\sum_{i=1}^{n} (X_i x_i + Y_i y_i + Z_i z_i)$ összeget az erők viriáljának nevezte. E szerint *az erők sebességi viriálja a t időpontban nem más mint az erőknek a t időpontig végzett munkájának differencziálhányadosa az idő szerint.*

Az erőnek munkája abból áll, hogy támadási pontjának, a mozgó pontnak helyét saját irányában változtatja; e munkát azért pontosabban ismét helyváltozási munkának mondhatjuk. — Ismét egészen természetesnek látszik, hogy az erő ama hatását is, melynél fogva támadási pontjának, a mozgó pontnak sebességét saját irányában változtatja, azaz ehhez egy az erő irányával megegyező irányú sebességi komponenst csatol, munkának nevezzük, de megkülönböztetésül a közönséges munkától, *sebességváltozási* vagy rövidebben *gyorsulási munkának.*

E szerint a

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i x''_i + Y_i y''_i + Z_i z''_i)$$

kifejezést nevezzük *az erőrendszer gyorsulási viriáljának a t* *időpontban*, a miből azután a t_0-tól t-ig terjedő időközben végzett gyorsulási munka:

$$\int_{t_0}^{t} \sum_{i=1}^{n} (X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i'')\, dt,$$

és a gyorsulási viriál ismét a t időpontig végzett gyorsulási munka differencziálhányadosa az idő szerint.

7. Végre még egy új fogalom vezetendő be, mely azonban már nem keletkezik többé ismert fogalmakból az által, hogy ezeknek megalkotásánál a sebességeket fölcseréljük a gyorsulásokkal. Ez a következő. Ha ismét egy n pontból álló rendszernél az i edik pontnak tömege m_i és az i-edik pontra ható erő komponensei X_i, Y_i, Z_i, akkor képezzük e kifejezést

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

melyet *az erőrendszer* (a pontrendszerre vonatkozó) *energémájának* kivánok nevezni. Ezen elnevezést, melyet Szily Kálmán barátom ajánlott, azért találom különösen jónak, mert azon alak valóban a ható rendszernek azon tulajdonságát jellemzi, melynek a mozgó rendszerben az energia felel meg. Legalább bizonyos tekintetben e kifejezés az erőrendszernek hatásképességét fejezi ki tekintettel a pontrendszerre, a melyre hat; az új elnevezés azonban szükségesnek látszott a hatás, akczió, intenzitás stb. szavak sokszoros, más értelemben történő használata miatt.

Ha *egy* pontot képzelünk, melynek tömege egyenlő a pontrendszerben foglalt n pont tömegének összegével,

$$M = m_1 + m_2 + \ldots + m_n,$$

akkor mindig lehet egy R nagyságú erőt fölvenni, úgy hogy ezen erőnek az M tömegű pontra vonatkozó energémája egyenlő az erőrendszernek a pontrendszerre vonatkozó energémájával, ha t. i. R-et úgy határozzuk meg, hogy

$$\frac{R^2}{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2),$$

azaz

$$R = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{m_i} (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)},$$

hol természetesen a négyzetgyök pozitiv előjele választandó.

Ha a pontrendszer csak egy pontból áll, R nem más, mint az eredő nagysága; különben is indokolva lesz, ha R-et *az erőrendszer (absolut) nagyságának* nevezzük.

Az erőrendszer komponensei R segítségével kifejezve lesznek:

$$X_i = R\alpha_i, Y_i = R\beta_i, Z = R\gamma_i,$$

hol azután:

$$\alpha_i = \frac{X_i}{R}, \beta_i = \frac{Y_i}{R}, \gamma_i = \frac{Z_i}{R};$$

és még:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2) = 1,$$

ha a gyakrabban előforduló $\frac{M}{m_i}$ viszonyszámokat μ_i-vel jelöljük.

Az α_i, β_i, γ_i együtthatók összessége, mely az épen fölirt relácziónak tartozik eleget tenni, az erőrendszer egy második tulajdonságát jellemzi, mely egy erő esetében átmegy ennek irányába, és melyet általánosságban az erőrendszer *dispozicziójának* vagy *irányzatának* akarok nevezni. Ez megadja az egyes pontokra ható erők nagyságát, az egész erőrendszer nagyságához viszonyítva, t. i.

$$\frac{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}}{R} = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2},$$

és az i-edik pontra ható erő irányának cosinusait, a melyek

$$\frac{\alpha_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}}, \frac{\beta_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}}, \frac{\gamma_i}{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2}},$$

Az $\ldots \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \ldots$ számok röviden az *irányzat együtthatói* legyenek. Tekintettel a közöttük fönnálló kapcsolatra, csak két oly irányzat van, melynél az adott a_i, b_i, c_i számok, *az irányzat viszonyszámai*, melyekre nézve t. i.

$$\ldots : \alpha_i : \beta_i : \gamma_i : \ldots = \ldots : a_i : b_i : c_i : \ldots,$$

mert ekkor

$$\alpha_i = ka_i, \beta_i = kb_i, \gamma_i = kc_i,$$

hol

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i(a_i^2 + b_i^2 + c_i^2)}}.$$

Két oly irányzat, melynél a megfelelő együtthatók mindig csak az előjelben különböznek, *egyenlő jellegű*, de *ellentett értelmű*. (Egy erőnél ellentett irányok.)

Minden erőrendszer megadható az előbbiek szerint nagysága és irányzata által.

8. Valamely $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ erőrendszer, (S) (e szót az eddig használt értelemben véve) fölbontható k parcziális rendszerre vagy k (tágabb értelemben vett) komponensre, ha k oly erőrendszert állapitunk meg:

$$S_1) \ldots, X_i', Y_i', Z_i', \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$S_k) \ldots, X_i^{(k)}, Y_i^{(k)}, Z_i^{(k)} \ldots,$$

hogy

$$X_i = X_i' + \ldots + X_i^{(k)},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$Z_i = Z_i' + \ldots + Z_i^{(k)}.$$

Ekkor $S_1, \ldots, S_k$ az S *fölbontásából* keletkezett, vagy megforditva S az $S_1 \ldots S_k$ (geometriai) *összetételénél* keletkező eredő erőrendszer.

Bárminők is a vizsgált pontrendszernek, melyre azon erőrendszerek hatnak, sebességei vagy gyorsulásai, közvetetlenül látni, hogy a parcziális erőrendszerek sebességi vagy gyorsulási viriáljának és tehát munkáiknak is összege nem más, mint az eredő rendszer viriálja ill. munkája.

Ellenben a parcziális erőrendszerek energémáinak összege általánosságban nem egyenlő az eredő rendszer energémájával.

De minden erőrendszer fölbontható egy és csakegy meghatározott módon két oly parcziális rendszerre, hogy az egyik rendszernek adott jellegű irányzata legyen, és a két parcziális rendszer energémáinak összege az adott rendszer energémájával egyenlő.* E föltétel tudniillik megadja ama parcziális rendszer nagyságát is. Ebben az esetben ama parcziális rendszert a *rendszer komponense az adott irányzatban.* Itt már a komponens szót a közönséges szűkebb értelemben használjuk, úgy hogy az értelmezés egy erő esetében az illető erőnek adott irányba eső komponensét adja.

Adva lévén az irányzat, az első rendszernek csak nagysága választható még úgy, hogy a jelzett követelést kielégítsük. Legyen ez R', akkor

$$X_i' = R'\alpha_i', \; Y_i' = R'\beta_i', \; Z_i' = R'\gamma_i,$$

és természetesen

$$X_i'' = X_i - R'\alpha_i', \; Y_i'' = Y_i - R'\beta_i', \; Z_i'' = Z_i - R'\gamma_i'.$$

Tehát az energémára vonatkozó föltétel ki van elégítve, ha:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'^2}{m_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i''^2 + Y_i''^2 + Z_i''^2}{m_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

vagyis, ha M-mel szorzunk, hol ismét $M = m_1 + \ldots + m_n$,

$$R'^2 + \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\overline{X_i - R'\alpha_i'}^2 + \overline{Y_i - R'\beta_i'}^2 + \overline{Z_i - R'\gamma_i'}^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2)$$

és így végre:

$$2R'^2 - 2R' \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i') = 0.$$

Ha tehát eltekintünk az $R' = 0$ formális megoldástól, mely valóban nem ád fölbontást, mert ekkor minden X_i', Y_i', Z_i' is

* Ezentúl, ha adott irányzatról van szó, mindig adott *jellegű* irányzat értendő.

eltünik, lesz :

$$R' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i') .$$

Ha R' ezen értéke pozitiv, akkor ama komponens irányzatának együtthatói ... $\alpha_i', \beta_i', \gamma_i', \ldots$, nagysága R'; ha R' negativ, akkor ellentett értelmü irányzat választandó, melynek együtthatói ...., $-\alpha_i'$, $-\beta_i'$, $-\gamma_i'$, ..., míg a komponens nagysága $- R'$. Ha $R' = 0$, akkor azt mondjuk, hogy az illető irányzatban az erőrendszernek nincs komponense, azaz nagysága, és evvel együtt minden benne foglalt erő nagysága 0.

9. Az adott jellegü irányzatnak megfelelő komponens különben az energéma fogalmának alkalmazása nélkül a munka (akár a közönséges, akár a gyorsulási munka) segítségével is értelmezhető.

Az ... $X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ erőrendszernek komponense az ... α_i, $\beta_i, \gamma_i \ldots$ együtthatóknak megfelelő jellegű irányzatban nem más mint azon erőrendszer, melynek irányzata a most megadott, és melynek sebességi viriálja, midőn a sebességi komponensek

$$\ldots, \frac{h\alpha_i'}{m}, \frac{h\beta_i'}{m}, \frac{h\gamma_i'}{m}, \ldots$$

(hol h egy különben közönbös arányossági tényező) ugyanaz, mint az ..., X_i, Y_i, Z_i, ... erőrendszeré.

Ha e komponens nagyságát ismét R'-vel jelöljük, e szerint

$$\sum_{i=1}^{n} R'h \frac{\alpha_i'^2 + \beta_i'^2 + \gamma_i'^2}{m_i} = \sum_{i=1}^{r} \frac{h (X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i')}{m}$$

ha tehát h-val osztunk és M-mel szorzunk,

$$R' \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_i'^2 + \beta_i'^2 + \gamma_i'^2) = R' = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i'),$$

úgy mint előbb.

Ily irányú sebességek mellett az előbb ... X_i'', Y_i'', Z_i'', ... vel jelzett erőrendszer nem végez munkát; a jelenség olyan, mintha csak ama komponens végezne munkát, miért is e komponens ezen általánosításban is az illető irányzatnak megfelelő munkaképző komponens.

Hasonló módon jutunk ismét e komponenshez, ha a sebességek és helyváltozási munka helyett a gyorsulásokat és a gyorsulási munkát használjuk.

10. Ha adva vannak valamely erőrendszer komponensei azon irányzatokban, melyeknek jellegét az

$$D_1) \quad \ldots a_{i1}, \beta_{i1}, \gamma_{i1}, \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_k) \quad \ldots a_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}, \ldots$$

együtthatók jellemzik, akkor egyszersmind ismeretes minden komponens, melynek irányzatát a

$$\ldots, l_1 a_{i1} + \ldots + l_k a_{ik}, l_1 \beta_{i1} + \ldots + l_k \beta_{ik}, l_1 \gamma_{i1} + \ldots + l_k \gamma_{ik}, \ldots$$

együtthatók jellemzik. Mert ha ama komponensek nagysága $R_1, \ldots R_k$, akkor az utóbbié:

$$\overline{R} = l_1 R_1 + \ldots + l_k R_k.$$

Az $l_1 \ldots l_k$ számok, hogy az utóbbi kifejezések irányzat együtthatói legyenek, természetesen kell, hogy kielégítsék a következő egyenletet

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left((l_1 a_{i1} + \ldots + l_k a_{ik})^2 + (l_1 \beta_{i1} + \ldots + l_k \beta_{ik})^2 + \right.$$
$$\left. + (l_i \gamma_{i1} + \ldots + l_k \gamma_{ik})^2 \right) = 1 .$$

Minthogy ezen összeg mindig pozitiv, az $u_1 \ldots u_k$ számok tetszőleges rendszeréből egy U kellő meghatározása mellett

$$l_1 = \frac{u_1}{U}, \ldots, l_k = \frac{u_k}{U}$$

a feltételnek megfelelő számok rendszere lesz.

Ha a szóban lévő $D_1, \ldots, D_k$ irányzatok együtthatói olyanok, hogy az u_1 $u_2, \ldots u_k$ számoknak legalább egy oly választásánál. hol nem minden u zérussal egyenlő,

$$u_1 \alpha_{i1} + \ldots + u_k \alpha_{ik} = 0,$$
$$u_1 \beta_{i1} + \ldots + u_k \beta_{ik} = 0,$$
$$u_1 \gamma_{i1} + \ldots + u_k \gamma_{ik} = 0,$$
$$(i = 1, 2 \ldots n)$$

akkor azt mondjuk, hogy *a* $D_1, \ldots, D_k$ *irányzatok nem függetlenek egymástól. Ekkor ugyanis bármely erőrendszernek a* $D_1, \ldots, D_k$ *irányzatokba eső komponensei sem függetlenek egymástól, hanem ha e komponensek nagysága* $R_1, \ldots R_k$, akkor:

$$u_1 R_1 + \ldots + u_k R_k = 0$$

hol $u_1 \ldots, u_k$ az épen fölirt egyenletrendszernek egy gyökrendszere, mely nem csupán 0-okból áll.

Ha ellenben ezen egyenletrendszert más értékek, mint $u_1 = 0, \ldots, u_k = 0$ nem elégítik ki, *a* $D_1 \ldots D_k$ *irányzatok egymástól függetlenek; ekkor ugyanis vannak mindig oly erőrendszerek, melyeknek a* $D_1, \ldots, D_k$ *irányzatokba eső komponensei tetszőlegesen választott* $R_1, \ldots, R_k$ *nagyságúak.*

Ennek bizonyítására csak az jegyzendő meg, hogy az értelmezés szerint a $D_1, D_2, \ldots D_k$ irányzatok egymástól függetlenek vagy sem, a mint e k sorból és $3n$ oszlopból álló matrixból

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}, \ldots, \alpha_{n1}, \beta_{n1}, \gamma_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1k}, \beta_{1k}, \gamma_{1k}, \ldots, \alpha_{nk}, \beta_{nk}, \gamma_{nk} \end{matrix} \right\|$$

képezhető k-adrendű determinánsok közt legalább egy van, mely nem 0, vagy pedig e k-adrendű determinánsok mind eltünnek.

Az első esetben a megfelelő $\ldots X_i,\ Y_i,\ Z_i, \ldots$ erőrendszer meghatározására szolgáló egyenletrendszer:

$$R_1 = X_1 \alpha_{11} + Y_1 \beta_{11} + Z_1 \gamma_{11} + \ldots + X_n \alpha_{n1} + Y_n \beta_{n1} + Z_n \gamma_{n1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$R_k = X_1 \alpha_{1k} + Y_1 \beta_{1k} + Z_1 \gamma_{1k} + \ldots + X_n \alpha_{nk} + Y_n \beta_{nk} + Z_n \gamma_{nk},$$

mely ekkor tényleg az $R\ , \ldots, R_k$ bármely értékeinél megoldható, még pedig $3n-k$-szorosan határozatlan.

A mint ebből látni, *több mint 3n egymástól független irányzat egyáltalában nem lehetséges; de 3n egymástól független irányzat végtelen sok-módon állapítható meg.* Továbbá:
Ha adva van valamely erőrendszernek 3n egymástól független irányzatba eső komponenseinek nagysága, akkor az erőrendszer teljesen meg van határozva.

Ezen utolsó állítás csak speciális esete a következő, többször használandó általánosabb tételnek.

11. *Ha az $S_1,\dots S_k$ erőrendszernek irányzatai $D_1,\dots D_k$ egymástól függetlenek, mindig létezik egy és csak egy oly S erőrendszer, melynek irányzata D nem független a $D_1,\dots, D_k$ irányzatoktól, és melynek a $D_1,\dots, D_k$ irányzatokba eső komponensei épen az $S_1,\dots, S_k$ erőrendszerek.*

Az $S_1,\dots, S_k$ rendszerek nagyságát és irányzatát úgy jelölve mint előbb, ha továbbá a keresett S rendszer nagysága $\overline{R}$ és irányzatának együtthatói:

$$\dots, l_1\alpha_{i1}+\dots+l_k\alpha_{ik}, l_1\beta_{i1}+\dots+l_k\beta_{ik}, l_1\gamma_{i1}+\dots+l_k\gamma_{ik},\dots,$$

hol még

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big((l_1\alpha_{i1}+\dots+l_k\alpha_{ik})^2+(l_1\beta_{i1}+\dots+l_k\beta_{ik})^2+&\\ +(l_1\gamma_{i1}+\dots+l_k\gamma_{ik})^2\big)=1,&\end{aligned}\tag{1.}$$

az $\overline{R}_1, l_1,\dots, l_k$ meghatározására az utolsó egyenlet mellett, a föladat értelmében még lesz:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big(\overline{R}(l_1\alpha_{i1}+\dots+l_k\alpha_{ik})\alpha_{ij}+\overline{R}(l_1\beta_{i1}+\dots+l_k\beta_{ik})\beta_{ij}&\\ +\overline{R}(l_1\gamma_{i1}+\dots+l_k\gamma_{ik})\gamma_{ij}\big)=R_j,&\\ (j=1,2,\dots,k)&\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}l_1\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ij}+\beta_{i1}\beta_{ij}+\gamma_{i1}\gamma_{ij})+\dots+&\\ +l_k\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ij}+\beta_{ik}\beta_{ij}+\gamma_{ik}\gamma_{ij})=\frac{R_j}{\overline{R}},&\\ (j=1,2\dots,k).&\end{aligned}\tag{2.}$$

A (2.) rendszer megadja először is $l_1 \ldots l_k$-t mint az $\frac{R_1}{R}, \ldots, \frac{R_k}{R}$ homogén lineár függvényét; az $l_1 \ldots, l_k$ ezen értékei bevezetve az (1.) egyenletbe végre az R-nek egy és csak egy pozitiv értékét szolgáltatják

A (2.) egyenletrendszer determinánsa ugyanis nem tünhetik el, ha a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatok egymástól függetlenek.

E determináns tudniillik úgy keletkezik, hogy az előbb fölirt matrixot saját magával komponáljuk; az ily módon keletkező determináns pedig ismeretes tétel értelmében (l. p. Baltzer, Determinanten, 6-ik §, 2.) csak akkor lehet 0, ha minden ama matrixból képezhető k-adrendű determináns 0, azaz ha a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatok nem függetlenek egymástól.

12. *Ha valamely erőrendszer, S fölbontását két parcziális rendszere úgy eszközöljük, hogy az első parcziális rendszer az S komponense, akkor a második parcziális rendszer szintén az S komponense, még pedig ha az S_1 és S_2 irányzatait a következő együtthatók jellemzik:*

$$D_1) \quad \ldots, \alpha'_i, \beta'_i \cdot \gamma'_i, \ldots,$$

$$D_2) \quad \ldots, \alpha''_i, \beta''_i, \gamma''_i, \ldots,$$

akkor:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha'_i \alpha''_i + \beta'_i \beta''_i + \gamma'_i \gamma''_i) = 0.$$

Két irányzat, melynek együtthatói között ily kapcsolat áll fönn, egymásra vonatkozólag *orthogonális* irányzatnak mondható. (Egy pont esetében, midőn az irányzatok irányokat jelentenek, az illető erők iránya t. i. egymásra merőlegesen áll).

Legyen ugyanis az S rendszerre nézve a D_1 irányzat eső komponens nagysága R'; akkor a föltételek értelmében

$$X_i = R'\alpha'_i + X''_i,$$
$$Y_i = R'\beta'_i + Y''_i,$$
$$Z_i = R'\gamma'_i + Z''_i.$$

Az S_2 vagy részletesen $\ldots X''_i, Y''_i, Z''_i, \ldots$ rendszernek legyen már most nagysága R'', irányzatának együtthatói

$\ldots, \alpha_i'', \beta_i'', \gamma_i'', \ldots$; akkor ha a fölirt egyenletek $\mu_i\,\alpha_i'$, $\mu_i\,\beta_i'$, $\mu_i\,\gamma_i'$-vel szorozzuk és összeadunk lesz

$$\sum \mu_i\,(X_i\alpha_i' + Y_i\beta_i' + Z_i\gamma_i') = R' + R'' \quad \sum \mu_i\,(\alpha_i'\alpha_i'' + \beta_i'\beta_i'' + \gamma_i'\gamma_i'') = 0$$

Minthogy azonban R' máris a baloldalon álló kifejezéssel egyenlő, ha valóban fölbontás történt, azaz S_1 és S nem azonos, tehát R'' nem 0, csakugyan:

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,(\alpha_i'\alpha_i'' + \beta_i'\beta_i'' + \gamma_i'\gamma_i'') = 0\,,$$

és most már ha az egyenleteket rendre $\mu_i\,\alpha_i''$, $\mu_i\,\beta_i''$, $\mu_i\,\gamma_i''$-vel szorozzuk, végre

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,(X_i\alpha_i'' + Y_i\beta_i'' + Z_i\gamma_i'') = R''\,,$$

azaz S_2 valóban az S-nek a D_2 irányzatba eső komponense.

13. Visszatérve ezután a megelőző tárgyalásokra *az összes erőrendszerek, melyekre nézve a $D_1, \ldots, D_k$ egymástól független irányzatokba eső komponensek nagysága $R_1, \ldots, R_k$, mint két komponens eredői ábrázolhatók. Az első komponens nem más, mint azon rendszer, melynek irányzata a $D_1, \ldots, D_k$-tól nem független, és melyre nézve a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatokba eső komponensek nagysága $R_1, \ldots R_k$. Ez az előbbiek szerint teljesen meg van határozva. A második komponens nagysága tetszőlegesen választható, irányzatára nézve pedig a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatokra vonatkozólag orthogonális.*

Ez annyit jelent, hogy ha e második komponens irányzatának együtthatói

$$\ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots,$$

akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i\,(\alpha_{ij}\varphi_i + \beta_{ij}\psi_i + \gamma_{ij}\chi_i) = 0$$
$$(j = 1, \ldots, k).$$

Ha amaz előbb meghatározott erőrendszer nagysága R, irányzatának együtthatói pedig ismét:

$$\ldots l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik},\, l_1\beta_{i1} + \ldots + l_k\beta_{ik},\, l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik}, \ldots$$

akkor egyáltalában minden erőrendszer így irható:

$$X_i = \overline{R}(l_1 a_{i1} + \ldots + l_k a_{ik}) + X_i'',$$
$$Y_i = \overline{R}(l_1 \beta_{i1} + \ldots + l_k \beta_{ik}) + Y_i'',$$
$$Z_i = \overline{R}(l_1 \gamma_{i1} + \ldots + l_k \gamma_{ik}) + Z_i''.$$

Legyen az így keletkező $\ldots X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ erőrendszer nagysága ρ, irányzatának együtthatói

$$\ldots \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots,$$

akkor hogy az $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ erőrendszernek a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatokba eső komponensei épen $R_1, \ldots, R_k$ legyenek, az $l_1 \ldots l_k$ együtthatók meghatározására szolgáló egyenletek értelmében kell, hogy

$$\sum \mu_i (X_i'' a_{ij} + Y_i'' \beta_{ij} + Z_i'' \gamma_{ij}) = 0$$

legyen, a mi tekintetbe véve, hogy

$$X_i'' = \rho \varphi_i, \; Y_i'' = \rho \psi_i, \; Z_i'' = \rho \chi_i,$$

végre követeli, hogy tételünk értelmében

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i (\varphi_i a_{ij} + \psi_i \beta_{ij} + \chi_i \gamma_{ij}) = 0$$

legyen, hacsak nem $\rho = 0$; a mi ismét azon többször említett speciális esetnek felel meg, hogy a második komponens eltünik.

Ha ρ nem 0, akkor végre az X_i, Y_i, Z_i meghatározására szolgáló egyenleteket $\ldots, \mu_i \varphi_i, \mu_i \psi_i, \mu_i \chi_i$-vel szorozva lesz

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \varphi_i + Y_i \psi_i + Z_i \chi_i),$$

azaz $\ldots X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ csakugyan az $\ldots X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ rendszernek a $\ldots \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$ együtthatók által jellemzett irányzatba eső komponense.

Ha egy adott $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ erőrendszerből indulunk ki, akkor a $D_1, D_2 \ldots D_k$ irányzatok megadása után az $R_1, \ldots R_k$, és ezekkel az $l_1, \ldots l_k$, továbbá az $\overline{R}$, valamint végre az $\ldots, X_i'', Y_i'', Z_i'', \ldots$ vagyis a $\rho, \ldots, \varphi_i, \psi_i, \chi_i, \ldots$ értékei is teljesen meglesznek határozva. Mint könnyű látni ezen eredmény még a következő tételben foglalható össze.

Adott erőrendszer csak egy módon bontható föl két oly komponensre, hogy az egyik komponensnek a tetszőlegesen megszabott és egymástól független $D_1 \ldots, D_k$ irányzatokba eső komponensei ugyanazok legyenek, mint az eredeti teljes rendszeré, míg irányzata a $D_1, \ldots, D_k$-tól nem független. A második komponens irányzata pedig mindig orthogonális legyen a $D_1, \ldots, D_k$-hoz képest.

Ehhez ugyanis szükséges, hogy a második komponensnek a $D_1, \ldots D_k$, irányzatokba eső részei eltünjenek; tehát kell, hogy irányzata a $D_1, \ldots, D_k$-hoz képest orthogonális legyen. E szerint az első komponens nem lehet más, mint azon erőrendszer, melyet a 11. czikkben meghatároztunk, és melylyel a második is teljesen meg van határozva.

III. A MOZGÁS ALAPTÖRVÉNYEI.

14. Legyen ismét a vizsgált pontrendszer i-edik pontjának tömege, m_i az i-edik pontra ható erő komponensei X_i, Y_i, Z_i. A pontrendszer mozgása kényszer hatásával történik; a kényszer egyenletei:

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{i1}x_i'' + B_{i1}y_i'' + C_{i1}z_i'') = U_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}x_i'' + B_{ij}y_i'' + C_{ij}z_i'') = U_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(A_{ik}x_i'' + B_{ik}y_i'' + C_{ik}z_i'') = U_\kappa,$$

a mely egyenletek természetesen egymástól függetleneknek tételezhetők föl.

Első sorban ezen egyenletek jelentése a megelőzőleg bevezetett új fogalmak segítségével igen egyszerüen fejezhető ki. E czélból oszszuk el a j-edik egyenlet minden tagját a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i(A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + C_{ij}^2)}$$

pozitiv értékével; ha röviden

$$\frac{A_{ij}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\mu_i(A_{ij}^2 + B_{ij}^2 + C_{ij}^2)}} = \alpha_{ij}, \quad \frac{B_{ij}}{\sqrt{\cdots}} = \beta_{ij}, \quad \frac{C_{ij}}{\sqrt{\cdots}} = \gamma_{ij},$$

$$\frac{U_{ij}}{\sqrt{\cdots}} = G_{ij},$$

az egyenletek a következő alakba mennek át:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{i1}x_i'' + \beta_{i1}y_i'' + \gamma_{i1}z_i'') = g_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}x_i'' + \beta_{ij}y_i'' + \gamma_{ij}z_i'') = g_j,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{1k}x_i'' + \beta_{ik}y_i'' + \gamma_{ik}z_i'') = g_k.$$

Itt az egyes egyenletekben a gyorsulási komponensek együtthatói:

$$\ldots, \alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \ldots$$

irányzatok együtthatói, mert a bevezetett osztók értéke miatt:

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{ij}^2 + \beta_{ij}^2 + \gamma_{ij}^2) = 1.$$

Az egy-egy egyenlet együtthatóinak megfelelő irányzatokat ismét $D_1, \ldots, D_j, \ldots, D_k$-val jelöljük. A $D_1, \ldots, D_k$ irányzatok egymástól függetlenek, mert különben a kényszer egyenletei sem volnának egymástól függetlenek.

Ha a ható erők rendszerének a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatokba eső komponenseinek nagyságát $R_1 \ldots, R_k$-val jelöljük, az egyenletek $R_1 \ldots, R_k$-val szorozva átmennek a következő alakba:

$$\sum_{i=1}^{n}(R_j\alpha_{ij}x_i'' + R_j\beta_{ij}y_i'' + R_j\gamma_{ij}z_i'') = R_jg_j$$

melynek jelentése az, hogy *az erőrendszer a D_j irányzatba eső komponensének gyorsulási viriálja a kényszer következtében minden pillanatban a mozgási állapotnak meghatározott függvénye.*

(Csak akkor nem gyakorol befolyást ezen eredményre az illető kényszeregyenlet, ha az illető komponens nagysága zérus, a mikor az illető gyorsulási viriálról különben is már tudjuk, hogy zérus.)

Hasonlóképp ismerjük a gyorsulási viriált, az erőrendszernek bármely a $D_1, \ldots, D_k$ irányzatoktól nem független irányzatba eső komponensére vonatkozólag. Ha ugyanis az átalakított kényszeregyenleteket a megfelelő $l_1 \dots l_k$ együtthatókkal szorozzuk és ismét

$$\overline{R} = l_1 R_1 + \dots + l_k R_k,$$

akkor

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\overline{R}(l_1 a_{i1} + \dots + l_k a_{ik})\, x_i'' + \overline{R}(l_1 \beta_{i1} + \dots + l_k \beta_{ik})\, y_i'' +$$

$$+ \overline{R}\,(l_1 \gamma_{i1} + \dots + l_k \gamma_{ik})\, z_i''\Big) = \overline{R}\,(l_1 g_1 + \dots + l_j g_j),$$

mely egyenlet az erőrendszer bármely a $D_1, \dots, D_k$ irányzatoktól nem független irányzatba eső komponensek gyorsulási viriálját megadja, mint a mozgási állapot függvényét.

Az erőrendszernek a $D_1 \dots D_k$ irányzatoktól nem független irányzatba eső komponenseit ez okból *a kényszernek alávetett komponensek*nek mondhatjuk.

Ellenben az adott erőrendszernek bármely más komponense csak *részben* lesz a kényszernek alávetve, a mennyiben e komponensnek a $(D_1 \dots D_k)$ irányzatok * valamelyikébe eső alkomponense ismét olyan, melynek gyorsulási viriálja ismeretes. Kivételt tesz azonban azon eset, midőn a vizsgált komponens irányzata a $(D_1 \dots D_k)$ irányzataira vonatkozólag orthogonális, tehát minden a $(D_1 \dots, D_k)$ irányzatba eső alkomponens nagysága zérus, és így gyorsulási viriálja is a kényszer egyenleteitől függetlenül zérus. Ezen esetben a komponensről azt mondjuk, hogy nincs a kényszernek alávetve, vagyis *szabad komponens*. Tényleg ha bármiképen megállapítunk $3n—k$ független és a $D_1, \dots, D_k$-hoz orthogonális irányzatot, és bárhogy szabjuk meg az ezen irányzatokba eső komponensek gyorsulási viriálját, oly egyenletek keletkeznek, melyek a kényszer egyenleteivel mindenkor összeférnek.

Világos, hogy a $(D_1, \dots, D_k)$ irányzatokhoz orthogonális irányzatokra szorítkozhatunk a kényszeregyenletektől független ujabb egyenletek képezésénél. Mert minden más esetben a komponens a 13. czikk értelmében fölbontható két részre, hol az egyiknek gyorsulási viriálja már a kényszer egyenle-

---

* «A $(D_1, \dots, Dk)$ irányzatok» rövidebb kifejezés a $D_1, \dots, D_k$-tól nem független irányzatok összessége helyett.

teiből ismeretes, a másik rész pedig csakugyan a $(D_1 \ldots D_k)$ irányzatokhoz orthogonális irányzatba eső komponens.

Fölhasználva újból a 13. czikk tételét, midőn egy *n* pontból álló rendszeren meghatározott erőrendszer és meghatározott kényszer működik, *az erőrendszer (minden időpontban) egy és csak egy meghatározott módon bontható föl két komponensre úgy, hogy ezek közül az egyik a kényszernek alávetett, a másik pedig szabad komponens.*

Nem szorúl újabb indokolásra, hogy e kiváló komponensek, mint *az erőrendszer szabad, illetőleg a kényszernek alávetett részei* ezentúl külön névvel szerepelnek.

15. Ezek után végre áttérhetünk a mozgás általános alaptörvényének fogalmazására, melynek különböző analog alakjai közűl a részletes tárgyalásra azt választom, mely bizonyos tekintetben ezen alakok közt a legegyszerűbb és legtermészetesebb. Ez a következő.

A pontrendszerre ható erőrendszer szabad részének gyorsulási viriálja minden időpontban egyenlő az erőrendszer e szabad részének energémájával.

Mindazon mozgások közt, melyek a kényszer egyenleteinek és a gyorsulási viriálra vonatkozólag épen kimondott tételnek megfelelőleg történhetnének, azon mozgás létesül, melynél a gyorsulási energia minden időpontban minimum.

Törvényünk jelentésére nézve még fontos megjegyzés a következő. Hogy két mozgásnál a gyorsulási viriál minden időpontban ugyanaz, ugyanannyit jelent — csak mathematikailag egyszerűbb fogalmazásban — mint azon állítás, hogy a két mozgásnál bármely időközben a gyorsulási munka ugyanaz. Szintúgy azon állítás, hogy valamely mozgásnál a gyorsulási viriál minden időpontban nagyobb (kisebb), mint egy bizonyos másik mozgásnál, teljesen egyértékű avval, hogy az első mozgásnál a gyorsulási munka bármely időközben nagyobb (kisebb), mint a másik mozgásnál.

Az elemzendő törvény két részből áll, az első az erők gyorsulási viráljának nagyságát állapítja meg; a második a gyorsulási energiát egy minimum föltételnek veti alá. Az egész törvénynek axioma-jellege van; és a törvény igazolása csak annyiból áll, hogy kimutatjuk miszerint, bármilyenek is a ható erők és a kényszer föltételei, e törvény mindenkor a mozgásnak közönségesen fölvett differencziálegyenleteihez és csak ezekhez vezet.

Először is a törvény első részével foglalkozunk; világos, hogy miután az erőrendszernek ama része, mely a kényszernek alá van vetve, meghatározott gyorsulási munkát végez ez ugyis kifejezhető, hogy a ható erőknek bármely időközben kifejtett összes gyorsulási munkája meg van adva.

A törvény első részének tartalma tehát egyenletben, a *gyorsulási viriál egyenletében* foglalható össze, melynek alakját az eddigi jelzések megtartásával következőkép lehet részletesen kifejteni.

Legyen ismét az i-edik (m_i tömegű) pontra ható erő komponensei X_i, Y_i, Z_i; a kényszer egyenletei:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}x_i'' + \beta_{ij}y_i'' + \gamma_{ij}z_i'') = g_j .$$
$$(j = 1, \ldots, k)$$

Akkor először is az $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ erőrendszer azon részének, mely a kényszernek alá van vetve, nagysága $\overline{R}$ és iránzata, melyet az

$$\ldots l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik},\; l_1\beta_{i1} + \ldots + l_k\beta_{ik},\; l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik}, \ldots$$

együtthatók jellemeznek, a következő $R, l_1, \ldots, l_k$ meghatározására szolgáló egyenletek által lesz megadva (11. czikk):

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\big((l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik})^2 + (l_1\beta_{i1} + \ldots + l_k\beta_{ik})^2 +$$
$$+ (l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik})^2\big) = 1,$$

$$l_1\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i1}\beta_{ij} + \gamma_{i1}\gamma_{ij}) + \ldots +$$
$$+ l_k\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\alpha_{ik}\alpha_{ij} + \beta_{ik}\beta_{ij} + \gamma_{ik}\gamma_{ij}) = \frac{R_j}{R},$$

hol ismét

$$R_j = \sum_{i=1}^{n}\mu_i(X_i\alpha_{ij} + Y_i\beta_{ij} + Z_i\gamma_j).$$

Ekkor továbbá az erőrendszer szabad része

$$X_i'' = X_i - \overline{R}(l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik}),$$
$$Y_i'' = Y_i - \overline{R}(l_1\beta_{i1} + \ldots + l_k\beta_{ik}),$$
$$Z_i'' = Z_i - \overline{R}(l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik}).$$

A kényszernek alávetett rész gyorsulási viriálja:

$$\overline{R}\sum_{i=1}^{n}\left((l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik})x_i'' + (l_1\beta_{i1} + \ldots + l_k\beta_{ik})y_i'' + \right.$$
$$\left. + (l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik})z_i''\right),$$

mely a kényszer egyenleteinek alapján még így is írható:

$$\overline{R}(l_1g_1 + l_2g_2 + \ldots + l_kg_k);$$

a szabad részé a fölállított tétel értelmében, ha e az egész erőrendszernek az adott pontrendszerre vonatkozó energémáját jelenti és $M = m_1 + \ldots + m_n$,

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i - \overline{R}(l_1\alpha_{i1} + \ldots + l_k\alpha_{ik}))^2 + \ldots + (Z_i - \overline{R}(l_1\gamma_{i1} + \ldots + l_k\gamma_{ik}))^2}{m_i} = e - \frac{\overline{R}^2}{M}$$

és így végre a *gyorsulási viriál egyenlete:*

$$\sum_{i=1}^{n}(X_ix_i'' + Y_iy_i'' + Z_iz_i'') =$$
$$= \overline{R}(l_1g_1 + \ldots + l_kg_k) + e - \frac{\overline{R}^2}{M}.$$

16. A gyorsulási energiára vonatkozó minimum föltétel végre megadja az x_i'', y_i'', z_i'' gyorsulási komponenseket, mint a mozgás állapot jelzőinek és a ható erők $\ldots X_i$, Y_i, $Z_i, \ldots$ komponenseinek függvényeit.

Legyenek, mint ily variácziószámítási problémáknál szokásos, x_i'', y_i'', z_i'' azon egyelőre létezőknek fölvett, de még ismeretlen függvények, melyek a minimum-föltételt kielégítik. Bármely más mozgásnál az x_i'', y_i'', z_i'' függvények helyébe más $x_i'' + \Delta x_i''$, $y_i'' + \Delta y_i''$, $z_i'' + \Delta z_i''$ függvények lépnek, hol a függvényeknek (véges) variácziói csak azon föltételnek vannak alávetve, hogy a variált függvények is eleget tegyenek a gyorsulási viriál és a kényszer egyenleteinek.

Minthogy ezen egyenletek az x_i'', y_i'', z_i''-re mind elsőfokúak, a föltételek, melyeknek a $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ variácziók eleget tenni tartoznak a következők:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\Delta x_i'' + Y_i\Delta y_i'' + Z_i\Delta z_i'') = 0, \qquad \text{(a)}$$

és

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}\Delta x_i'' + \beta_{ij}\Delta y_i'' + \gamma_{ij}\Delta z_i'') = 0. \qquad \text{(b)}$$

$$(j = 1, \dots, k).$$

Ha a gyorsulási komponensek x_i'', y_i'', z_i'', a rendszer gyorsulási energiája, melyet most röviden E_2-vel jelölünk:

$$E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2),$$

tehát:

$$\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\big((x_i'' + \Delta x_i'')^2 + (y_i'' + \Delta y_i'')^2 + (z_i'' + \Delta z_i'')^2\big) - \\ - \sum_{i=1}^{n} m_i\big(x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2\big),$$

vagy végre

$$\tfrac{1}{2}\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i''\Delta x_i'' + y_i''\Delta y_i'' + z_i''\Delta z_i'') + \\ + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\big(\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2\big)$$

Ha az (a) egyenletet egyelőre határozatlan μ, a (b) egyenleteket egyelőre határozatlan λ_j függvényekkel szorozva a $\frac{1}{2}\Delta E$ utolsó kifejezéséből levonjuk, ez végre lesz:

$$\tfrac{1}{2}\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n}(m_i x_i'' - \mu X_i - \lambda_1\alpha_{i1} - \dots - \lambda_k\alpha_{ik})\Delta x_i'' + \\ + \sum_{i=1}^{n}(m_i y_i'' - \mu Y_i - \lambda_1\beta_{i1} - \dots - \lambda_k\beta_{ik})\Delta y_i'' + \\ + \sum_{i=1}^{n}(m_i z_i'' - \mu Z_i - \lambda_1\gamma_{i1} - \dots - \lambda_k\gamma_{ik})\Delta z_i'' + \\ + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2).$$

Általánosságban a $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ függvényvariácziók absolut értéke oly kicsinyre vehető, hogy a három első sorban álló elsőrendű tagok által meghatározott előjel, az utolsó sorban álló másodrendű tagok hozzáadásánál már nem változik. De a $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ megfelelvén az (a) és (b) föltételeknek, ép úgy megfelelnek $-\Delta x_i''$, $-\Delta y_i''$, $-\Delta z_i''$, és így a ΔE_2-nek ellenkező előjelű értékeket lehetvén adni, az x_i'', y_i'', z_i'' egyáltalában nem elégíthetnék ki a minimum föltételt; egyetlenegy eset kivételével, ha t. i. minden $\Delta x_i''$, $\Delta y_i''$, $\Delta z_i''$ együtthatója 0, azaz az elsőrendű tagok egészen elesnek. Erre kell, hogy legyen:

$$\begin{aligned} m_i x_i'' &= \mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_{ik}, \\ m_i y_i'' &= \mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}, \\ m_i z_i'' &= \mu Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}, \end{aligned} \tag{c}$$

hol az eddig határozatlanul maradt $\mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ függvények ama föltételeknek megfelelőleg választandók, hogy az x_i'', y_i'', z_i'' eleget tegyenek a gyorsulási viriál és a kényszer egyenleteinek, a mi a szorzók teljes meghatározását adja.

Jegyezzük meg mindjárt itt, hogy ekkor:

$$\Delta E_2 = \sum_{i=1}^{n} m_i(\overline{\Delta x_i''^2} + \overline{\Delta y_i''^2} + \overline{\Delta z_i''^2})$$

mindig pozitiv, azaz a gyorsulási energia az ekkép választott függvények variálásánál mindig nagyobbodik, tehát *absolut minimum,* ha a gyorsulások a (c) egyenletekből vannak meghatározva.

17. Végre még elvégezendő a $\mu, \lambda_1 \ldots \lambda_k$ függvények meghatározása. Behelyettesítve x_i'', y_i'', z_i'' értékeit a gyorsulási viriál és a kényszer egyenleteibe, lesz:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\Big(X_i \frac{\mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_{ik}}{m_i} &+ Y_i \frac{\mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}}{m_i} + \\ &+ Z_i \frac{\mu Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}}{m_i} \Big) = \\ &= \overline{R}(l_1 g_1 + \ldots + l_k g_k) + e - \frac{R^2}{M}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\mu X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_{ik}}{m_i} &+ \sum_{i=1}^{n} \beta_{ij} \frac{\mu Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}}{m_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ij} \frac{\mu Z_i + \lambda_2 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}}{m_i} = g_j \end{aligned}$$

$$(j = 1, \ldots k)$$

Ez csakugyan $k+1$ elsőfokú egyenlet a $\mu, \lambda_1, \ldots \lambda_k$ meghatározására, legyen ismét röviden

$$M = m_1 + \ldots m_n,$$

és az erőrendszer energémája

$$e = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

akkor ezen egyenletrendszer következőkép is írható, ha t. i. minden egyenletben M-mel szorzunk:

$$Me\mu + \lambda_1 R_1 + \ldots + \lambda_k R_k = M\overline{R}(l_1 g_1 + \ldots + l_k g_k) + Me - \overline{R},$$

$$R_j \mu + \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{i1}\alpha_{ij} + \beta_{i1}\beta_{ij} + \gamma_{i1}\gamma_{ij}) + \ldots$$

$$\ldots + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{ik}\alpha_{ij} + \beta_{ik}\beta_{ij} + \gamma_{ik}\gamma_{ij}) = Mg_j.$$

$$(j = 1, \ldots, k)$$

Ha az utóbbi k egyenletet rendre $\overline{R}l_1, \ldots, \overline{R}l_k$-val szorozunk és ezeket azután az első egyenletből levonjuk, akkor az eredő egyenletben a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ együtthatói:

$$R_1 - \overline{R}\Big[l_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{i1}\alpha_{i1} + \beta_{i1}\beta_{i1} + \gamma_{i1}\gamma_{i1}) + \ldots$$

$$+ l_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{i1}\alpha_{ik} + \beta_{i1}\beta_{ik} + \gamma_{i1}\gamma_{ik}) \Big],$$

. . . .

$$R_1 - \overline{R}\Big[l_1 \sum_{i=1}^{n} \mu_i \alpha_{ik}\alpha_{i1} + \beta_{ik}\beta_{ik} + \gamma_{ik}\gamma_{i1}) + \ldots$$

$$+ l_k \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_{ik}\alpha_{ik} + \beta_{ik}\beta_{ik} + \gamma_{ik}\gamma_{ik}) \Big],$$

mint az $\frac{R_j}{\overline{R}}$-nek a 15. cikkben kiírt értékéből közvetetlenül látni, mind eltünnek. Minthogy továbbá

$$\overline{R}(R_1 l_1 + \ldots + R_k l_k) = \overline{R}^2$$

lesz végre:

$$(Me - \overline{R}^2)\mu = Me - \overline{R}^2,$$

azaz:

$$\mu = 1, \tag{A}$$

hacsak nem $e = \frac{\overline{R}^2}{M}$. Minthogy e az egész erőrendszer, $\frac{\overline{R}^2}{M}$ pedig a kényszernek alávetett rész energémája, ez csak akkor történik, ha az erőrendszer szabad részének energémája, tehát nagysága is 0, azaz ha az egész erőrendszer irányzata a $(D_1, \ldots, D_k)$ irányzatok sokaságába esik. Minden más esetben végre a $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ együtthatók meghatározása a

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i1}\alpha_{i1} + \beta_{i1}\beta_{i1} + \gamma_{i1}\gamma_{i1}}{m_i} + \ldots \\ &\qquad + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{i1}\alpha_{ik} + \beta_{i1}\beta_{ik} + \gamma_{i1}\gamma_{ik}}{m_i} = g_1 - \frac{R_1}{M} \\ &\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}\alpha_{i1} + \beta_{ik}\beta_{i1} + \gamma_{ik}\gamma_{i1}}{m_i} + \ldots \\ &\qquad + \lambda_k \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_{ik}\alpha_{ik} + \beta_{ik}\beta_{ik} + \gamma_{ik}\gamma_{ik}}{m_i} = g_k - \frac{R_k}{M} \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

egyenletekből történik.*

A fönt említett kivételes esetnek lényege az, hogy a $k+1$ egyenlet (szintúgy az eredeti $k+1$ föltételi egyenlet) nem független egymástól, hanem az első a többinek következménye. Hanem ekkor a (c) alatt fölállított alakok nem tartalmazzák valóban a μ, $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ függvényeket egymástól függetlenül, hanem csupán k ezekből összeállított lineár alakot. Minthogy ugyanis az $\ldots X_i$, Y_i, $Z_i \ldots$ erőrendszer a $(D_1, \ldots, D_k)$ irányzatok egyikébe esik, lesz a $h_1 \ldots h_k$ kellő meghatározása után

$$X_i = \sqrt{Me}\,(h_1 \alpha_{i1} + \ldots + h_k \alpha_{ik}),$$
$$Y_i = \sqrt{Me}\,(h_1 \beta_{i1} + \ldots + h_k \beta_{ik}),$$
$$Z_i = \sqrt{Me}\,(h_1 \gamma_{i1} + \ldots + h_k \gamma_{ik}),$$

és így végre

$$mx_i'' = (h_1 \mu \sqrt{Me} + \lambda_1)\,\alpha_{i1} + \ldots + (h_k \mu \sqrt{Me} + \lambda_k)\,\alpha_{ik},$$
$$my_i'' = (h_1 \mu \sqrt{Me} + \lambda_1)\,\beta_{i1} + \ldots + (h_k \mu \sqrt{Me} + \lambda_k)\,\beta_{ik},$$
$$mz_i'' = (h_1 \mu \sqrt{Me} + \lambda_1)\,\gamma_{i1} + \ldots + (h_k \mu \sqrt{Me} + \lambda_k)\,\gamma_{ik},$$

---

* E rendszer determinánsa ugyanaz, mely a 11. czikk végén szerepelt, tehát soha nem tünik el; és így a (B) egyenletrendszer mindig a λ-k-nak egy és csak egy értékrendszerét adja.

hol az α_{i1}, β_{i1}, γ_{i1},... együtthatói még akkor is tetszőleges értékűek lesznek, ha ismét μ helyett 1-et teszünk. Ezen helyettesítés tehát most az egyenletek általános voltán nem változtat, és ennek végrehajtása után a k független egyenlet (vagy k független föltétel) a λ-k meghatározására ugyanazon egyenleteket szolgáltatja mint előbb.

E szerint a gyorsulási energia minimumának tétele mindig a következő differencziálegyenletekhez vezet:

$$\begin{aligned} mx_i'' &= X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_{ik}, \\ my_i'' &= Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}, \\ mz_i'' &= Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}, \end{aligned} \tag{C.}$$

hol a λ együtthatók meghatározására a (B) alatt fölállított elsőfokú egyenletrendszer szolgál.

Ha a kényszer mint közönségesen egyszerübben csak

$$\varphi_1(\ldots, x_i, y_i, z_i, \ldots, t) = C_1$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\varphi_i(\ldots x_i, y_i z_i, \ldots t) = C_k$$

alakú egyenletek segítségével van definiálva, (melyek a sebességi komponenseket nem tartalmazzák) akkor, mint már a 4. czikkben kifejtettük, a kényszer egyenletei:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} x_i'' + \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} y_i'' + \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i} \right) = g_j;$$

azaz

$$\alpha_{ij} = L_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}, \ \beta_{ij} = L_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i}, \ \gamma_{ij} = L_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i},$$

hol még:

$$\frac{1}{L_j} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \mu_i \left(\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial z_i} \right)^2 \right)}$$

és a (C) egyenletek nem mások mint a mozgás differencziálegyenletei a Lagrange-tól származó alakban. A megegyezésre vonatkozólag legfölebb még megjegyzendő, hogy R_j az $\ldots X_i$, Y_i, $Z_i \ldots$ erőrendszerre nézve a D_j irányzatba eső komponens nagysága, azaz

$$R_j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (X_i \alpha_{ij} + Y_i \beta_{ij} + Z_i \gamma_{ij}),$$

tehát

$$\frac{R_j}{M} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i \alpha_{ij} + Y_i \beta_{ij} + Z_i \gamma_{ij}}{m_i}. \tag{D}$$

18. A mozgás alaptörvényének más megállapítása, mely alakilag a most részletesen tárgyalttal teljesen analog, de tartalmára nézve attól egészen független, oly módon érhető el, hogy a gyorsulási energia és a gyorsulási viriál szerepét egymással fölcseréljük. Ekkor ugyanis a törvény első része a gyorsulási energia nagyságát állapítja meg, míg a második rész a gyorsulási viriált most *maximum feltételhez* köti.

Ennek részletes kifejtésére szükséges volna a gyorsulások rendszerének fölbontását és összetevését ép oly módon kifejteni, mint ez a megelőzőkben erőrendszerekre vonatkozólag történt; e két elmélet, ha nem egyes pontra, hanem pontrendszerre vonatkozik, többé nem teljesen azonos. Ennek oka abban rejlik, hogy míg az erőrendszer nagyságát a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i}$$

kifejezés négyzetgyöke méri, addig a gyorsulások rendszerére vonatkozólag a gyorsulási energia

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \left(x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2\right)$$

veszi át az energéma szerepét; e két kifejezésnél pedig a megfelelő együtthatók nem egyenlők, hanem reciprok értékek. A gyorsulások rendszere itt is fölbontható egy szabad és egy kényszernek alávetett részre, mindegyik külön föllépésének bizonyos gyorsulási energia felel meg, a kényszernek alávetett részből keletkező a kényszer egyenleteiből van megadva, a másik pedig az erőrendszer egy *megfelelő* komponensének energémájával egyenlő. A mozgás alaptörvényének e megállapítását azért tartom a megelőzőnél kevésbé egyszerűnek és természetesnek, mert midőn gyorsulások és erők rendszerének *megfelelő* irányzatait külön megállapítjuk, evvel új axiomát vezetünk be, melyre az előbbi tárgyalásnál nem volt szükség; ott ugyanis ugyanazon *egy* bizonyos komponens munkáját és energémáját állítottuk egyenlőnek.

A gyorsulási energia egyenletének e fölállítása után a mozgás alaptörvényének második része következőkép hangzik:

Mindazon mozgások közt, melyek a kényszeregyenleteinek és a gyorsulási energia egyenletének megfelelőleg történhetnének, azon mozgás létesül, melynél a gyorsulási viriál minden időpontban maximum.

E törvény tartalmának lényegét különben új szempontok bevezetése nélkül is kimondhatjuk, csakhogy ekkor egyszerűen a történő mozgás egy tulajdonságát fejezi, de nem alaptörvényét, a mennyiben akkor (az első rész elhagyása miatt) nem adja meg a mozgás meghatározására szükséges *és elegendő* adatokat. E tétel a következő:

19. *A valóban történő mozgásnál a gyorsulási viriál minden időpontban nagyobb, mint bármely más mozgásnál, mely a kényszer egyenleteinek megfelelőleg történik, és melynél a gyorsulási energia minden időpontban ugyan az volna, mint a valóban történő mozgásnál.*

A valóban történő mozgás alatt most természetesen azt értjük, melyet az előbb fölállított egyenletek definiálnak. A «mozgások», melyekkel az összehasonlítás történik, olyképen tekintendők megadottaknak, hogy x_i'', y_i'', z_i'', a mozgási állapot jelzőinek és az $\ldots X_i$, Y_i, $Z_i, \ldots$ erőkomponensek bárminő függvényei, hacsak az említett föltételeknek megfelelnek.

Ha x_i'', y_i'', z_i'' a (C) egyenletek által definiált függvények, akkor a mozgási állapot jelzőinek és az erőkomponenseknek bármely más függvényeit, melyek épen más törvény szerint történő mozgásnál a gyorsulási komponenseket adnák, $x_i''+\varDelta x_i''$, $y_i''+\varDelta y_i''$, $z_i''+\varDelta z_i''$-vel jelölhetjük, hol $\varDelta x_i''$, $\varDelta y_i''$, $\varDelta z_i''$ ismét a föltételeknek alávetett, különben tetszőleges (véges) variacziók. Ha a gyorsulási viriált röviden V_2-vel jelöljük:

$$V_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i x_i'' + Y_i x_i'' + Z_i z_i''\right),$$

akkor:

$$\varDelta V_2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i \varDelta x_i'' + Y_i \varDelta y_i'' + Z_i \varDelta z_i''\right);$$

A $\varDelta x_i''$, $\varDelta y_i''$, $\varDelta z_i''$ számára fönnálló föltételek a kényszeregyenletekből ép úgy, mint előbb:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}\Delta x_i'' + \beta_{ij}\Delta y_i'' + \gamma_{ij}\Delta z_i'') = 0\,; \qquad (2.)$$
$$(j = 1, \ldots, k)$$

végre még minthogy a gyorsulási energia a tekintetbe jövő mozgásoknál megfelelő időpontokban mindig ugyanaz, még:

$$\tfrac{1}{2}\Delta\left(\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2)\right) = 0,$$

vagy részletesebben írva

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i''\Delta x_i'' + y_i''\Delta y_i'' + z_i''\Delta z_i'') + \qquad (3.)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2\right) = 0$$

Ha a (2) alatt álló kifejezéseket, $\lambda_1 \ldots \lambda_k$-val szorozva, a ΔV_2-hez hozzáadjuk és még a (3) alatt álló kifejezést belőle levonjuk, ΔV_2 értéke, minthogy ezek mind zérusok, nem változik; de ekkor az x_i'', y_i'', z_i'' függvények a (C) egyenletekből adott értékénél:

$$\Delta V_2 = -\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\overline{\Delta x_i''}^2 + \overline{\Delta y_i''}^2 + \overline{\Delta z_i''}^2\right);$$

azaz a gyorsulási viriál variácziója mindig negativ; vagyis a valóban történő mozgásnál a gyorsulási viriál nagyobb, mint bármely más a föltételek szerint lehetséges mozgásnál, a mi bebizonyítandó volt.

20. A dinamika alapegyenletei a gyorsulási komponenseket, mint a mozgási állapot jelzőinek és az erőkomponenseknek függvényeit adják. Az ebben foglalt kérdéstétel azonban meg is fordítható; úgy képzelhetjük, hogy a gyorsulási komponensek ismeretesek, mint a mozgási állapot jelzőinek függvényei, és kereshetünk azután oly általános elvet, mely a föllépő erőket adja meg, mint a mozgási állapot jelzőinek és a gyorsulási komponenseknek függvényeit. Közvetetlenül világos azonban, hogy ekkor kényszerről a szó előbbi értelemben nem lehet szó; a kényszer föltételei ugyanis a gyorsulási komponensek határozatlanságát megszorítják, de nem szüntetik meg egészen, míg most, midőn e gyorsulási komponensek teljesen meg vannak adva, ily föltételnek nem volna értelme.*

---

* Következetesen itt kényszeregyenletnek az ilyent kellene nevezni:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}X_i + b_{ij}Y_i + c_{ij}Z_i = g_j,$$

A jelzett probléma most úgy is fogalmazható, hogy *teljes kényszer* működik az illető pontrendszeren, azaz $3n$ kényszeregyenletünk van, mely a gyorsulási komponenseket teljesen megadja; meghatározandó azon szabad mozgás, vagyis az azon szabad mozgás létesítésére szükséges erők, melynél a pontrendszer mozgása ugyanaz, mint ama teljes kényszernél. A fölvetett kérdésre a következő tétel adja meg a feleletet.

A szabad mozgásnál működő erőrendszer gyorsulási viriálja minden időpontban egyenlő a pontrendszer gyorsulási energiájával; az erőrendszer energémája pedig kisebb, mint bármely más erőrendszeré, melynek gyorsulási viriálja szintén minden időpontban a pontrendszer gyorsulási energiájával egyenlő.

Legyen ismét $\ldots, X_i, Y_i, Z_i, \ldots$ a tételnek megfelelő, egyelőre hypothetikusan fölvett erőrendszer, bármely más erőrendszer $\ldots X_i + \Delta X_i, Y_i + \Delta Y_i, Z_i + \Delta Z_i, \ldots$ Akkor a tétel értelmében

$$\sum (x_i'' . \Delta X_i + y_i'' \Delta Y_i + z_i'' \Delta Z_i) = 0;$$

míg:

$$e = \sum_{i=x}^{n} \frac{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}{m_i},$$

tehát:

$$\tfrac{1}{2}\Delta e = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i \Delta X_i + Y_i \Delta Y_i + Z_i \Delta Z_i}{m_i} + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta X_i}^2 + \overline{\Delta Y_i}^2 + \overline{\Delta Z_i}^2}{m_i};$$

és ha ismét a variácziók föltételi egyenletében egy egyelőre határozatlan μ szorzóval szorzunk és levonunk

$$\tfrac{1}{2}\Delta e = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i}{m} - \mu x_i''\right)\Delta X_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Y_i}{m} - \mu y_i''\right)\Delta Y_i + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{Z_i}{m} - \mu z_i''\right)\Delta Z_i +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\overline{\Delta X_i}^2 + \overline{\Delta Y_i}^2 + \overline{\Delta Z_i}^2}{m_i}.$$

---

melynek értelme az volna, hogy a keresendő erőrendszer bizonyos diszpozicióba eső komponensének nagysága meg van adva. E fölfogás következetes keresztülvitele a dinamikában a geometriából ismeretes dualitás elvéhez hasonlító megállapításokhoz vezet, melyekre ez alkalommal nem kívánok áttérni.

Az erőrendszer tehát csak akkor tehet eleget a tétel követeléseinek, ha

$$\frac{X_i}{m} = \mu x_i'' ;$$

$$\frac{Y_i}{m} = \mu y_i'' ;$$

$$\frac{Z_i}{m} = \mu z_i'' ;$$

akkor pedig csakugyan:

$$\tfrac{1}{2}\Delta e = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{\Delta X}_i^2 + \overline{\Delta Y}_i^2 + \overline{\Delta Z}_i^2}{m_i},$$

azaz az energéma variácziója mindig pozitiv, vagyis amaz erők energémája absolut minimum.

A μ szorzó meghatározására szolgál a tétel első része, mely szerint:

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i x_i'' + Y_i y_i'' + Z_i z_i'') = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i''^2 + y_i''^2 + z_i''^2)$$

a miből X_i, Y_i, Z_i értékeinek helyettesítésénél közvetetlenűl következik, hogy

$$\mu = 1,$$

ha csak nem minden gyorsulási komponens 0, a mikor a föntebbi egyenletek szerint tekintet nélkül a μ értékére, minden X_i, Y_i, Z_i is eltűnik. Tehát akkor is, az eredmény változtatása nélkül μ-t 1-nek lehet venni. Vagyis a keletkező egyenletek:

$$m_i x_i'' = X_i,\ m y_i'' = Y_i,\ m z_i'' = Z_i$$

csakugyan a szabad mozgás egyenletei.

21. Minthogy a pontrendszer bármely mozgása, mint bizonyos fictiv erők hatása mellett történő szabad mozgás tekinthető, a kényszermozgás törvénye oly módon fogalmazható, hogy megadjuk azon erőket, melyek a pontrendszernek ugyanazon mozgását kényszer nélkül idéznék elő. Minthogy bármely erőrendszer az. . .,X_i, $Y_i Z_i$. . . erőrendszerből bizonyos . . ., X_i', Y_i', Z_i'. . . erőrendszer hozzátoldása által keletkezik, e fölfogásban azt is mondhatjuk, hogy *a kényszer következtében bizonyos toldalékos erőrendszer* (. . . X_i', Y_i', Z_i', . . .) *lép föl.*

A kényszermozgás törvénye e toldalékos erőrendszert következőkép határozza meg.

A toldalékos erőrendszer energémája minimum, mindazon erőrendszerekével szemben, melyeknek a ható erők rendszeréhez való hozzátoldása után, a pontrendszer szabad mozgása a kényszer egyenleteinek megfelelő volna.

Legyenek a kényszer egyenletei ismét:

$$\sum_{i=1}^{n}(\alpha_{ij}x_i''+\beta_{ij}y_i''+\gamma_{ij}z_i'')=g_j,$$
$$(j=1,\ldots,k)$$

és $\ldots X_i', Y_i', Z_i', \ldots$ azon egyelőre létezőnek fölvett toldalékos erőrendszer, mely a tétel követelményeinek megfelel. Bármely más ily erőrendszer, mely a kényszer egyenleteinek megfelelő mozgást létesít, ekkor

$$\ldots X_i'+\varDelta X_i',\; Y_i+\varDelta Y_i',\; Z_i'+\varDelta Z_i',\ldots$$

által ábrázolható, ha az

$$m_ix_i''=X_i+X_i'+\varDelta X_i'$$
$$m_iy_i''=Y_i+Y_i'+\varDelta Y_i'$$
$$m_iz_i''=Z_i+Z_i'+\varDelta Z_i'$$

egyenletekből meghatározott x_i'', y_i'', z_i'' értékek a kényszer egyenleteinek eleget tesznek. Erre szükséges és elegendő, hogy a $\varDelta X_i'$, $\varDelta Y_i'$, $\varDelta Z_i'$ (véges) variácziók eleget tegyenek a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}\frac{X_i+X_i'+\varDelta X_i'}{m_i}+\beta_{ij}\frac{Y_i+Y_i'+\varDelta Y_i'}{m_i}+\gamma_{ij}\frac{Z_i+Z_i'+\varDelta Z_i'}{m_i}\right)=g_j,$$

egyenleteknek vagyis, miután ép úgy

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\alpha_{ij}\frac{X_i+X_i'}{m_i}+\beta_{ij}\frac{Y_i+Y_i'}{m_i}+\gamma_{ij}\frac{Z_i+Z_i'}{m_i}\right)=g_j,$$

végre a

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}(\alpha_{ij}\varDelta X_i'+\beta_{ij}\varDelta Y_i'+\gamma_{ij}\varDelta Z_i')=0$$
$$(j=1\ldots k)$$

föltételeknek.

Másrészt a toldalékos erőrendszer energémája:

$$e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i'^2 + Y_i'^2 + Z_i'}{m_i};$$

és így

$$\tfrac{1}{2}\Delta e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(X_i'\Delta X_i' + Y_i'\Delta Y_i' + Z_i'\Delta Z_i') + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\left(\overline{\Delta X_i'}^2 + \overline{\Delta Y_i'}^2 + \overline{\Delta Z_i'}^2\right).$$

Ha tehát a föltételi egyenleteket egyelőre határozatlan $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ szorzókkal szorozzuk és $\frac{1}{2}\Delta e'$-ből kivonjuk, végre:

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\Delta e' = &\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(X_i' - \lambda_1 \alpha_{i1} - \ldots - \lambda_k \alpha_{ik})\,\Delta X_i' + \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(Y_i' - \lambda_1 \beta_{i1} - \ldots - \lambda_k \beta_{ik})\,\Delta Y_i' \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}(Z_i' - \lambda_1 \gamma_{i1} - \ldots - \lambda_k \gamma_{ik})\,\Delta Z_i' \\ &+ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\left(\overline{\Delta X_i'}^2 + \overline{\Delta Y_i'}^2 + \overline{\Delta Z_i'}^2\right).\end{aligned}$$

Tehát $\frac{1}{2}\Delta e'$ csak akkor lehet mindig pozitiv, ha a $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ kellően választott értékénél

$$\begin{aligned} X_i' &= \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_{ik}, \\ Y_i' &= \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}, \\ Z_i' &= \lambda_1 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}, \end{aligned}$$

a mikor

$$\tfrac{1}{2}\Delta e' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i}\left(\overline{\Delta X_i'}^2 + \overline{\Delta Y_i'}^2 + \overline{\Delta Z_i'}^2\right)$$

mindig pozitiv, tehát az így meghatározott ... X_i', Y_i', Z_i',... erőrendszer energémája csakugyan absolut minimum.

A $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ eddigelé határozatlan szorzók a kényszer egyenleteiből meg vannak adva, t. i.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\Bigg(\alpha_{ij}\frac{X_i + \lambda_1 \alpha_{i1} + \ldots + \lambda_k \alpha_k}{m_i} + \beta_{ij}\frac{Y_i + \lambda_1 \beta_{i1} + \ldots + \lambda_k \beta_{ik}}{m_i} + \\ + \gamma_{ij}\frac{Z_i + \lambda_1 \gamma_{i1} + \ldots + \lambda_k \gamma_{ik}}{m_i}\Bigg) = g_j,\end{aligned}$$

$$(j = 1 \ldots k)$$

a mi a λ-knak ugyanazon meghatározása, mint előbb a 17. czikknek (B) és (D) egyenleteiben; és végre tehát a kényszermozgás számára az előbb fölállított teljesen megegyező egyenletrendszerhez jutunk.

Szemben a megelőző tárgyalásokkal, hol minden mozgásra érvényes alaptörvény fölállításával foglalkoztunk, az utolsó két czikk eredményei speciális jellegűek, a mennyiben itt a szabad mozgás és a kényszermozgás esetei megkülönböztetendők, és az utóbbit az elsőre vezetjük vissza. Fölemlítendőknek tartottam e tételeket is, mert különösen a második, mint *a kényszermozgás elve,* egy a dinamikának közönséges tárgyalásánál mindig érezhető hézagot tölt ki.

XXI. *Hunyady Jenő.* Tételek a componalt determinánsoknak egy különös neméről. 10 kr. — XXII. *König Gyula.* A raczionális függvények általános elméletéhez. 10 kr. — XXIII. *Silberstein Salamon.* Vonalgeometriai tanulmányok 20 kr. — XXIV. *Hunyady János.* A Steiner-féle kritériumról a kúpszeletek elméletében. 10 kr. — XXV. *Hunyady Jenő.* A pontokból vagy érintőkből és a conjugált háromszögből meghatározott kúpszelet nemének eldöntésére szolgáló kritériumok. 10 kr.

Nyolczadik kötet.

I. szám. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1880-ban. *Konkoly Miklóstól.* Egy tábla rajzzal. — II. szám. Adatok Jupiter physikájához az 1880-ik évből. Egy függelékkel. *Konkoly Miklóstól.* — III. szám. A Bólyai-féle algorithmus. *Dr. Farkas Gyulától.* — IV. szám. Napfoltok megfigyelése 1880-ban, és 1382 napfolt micrometricus mérése. *Konkoly Miklóstól.* Két tábla rajzzal. — V. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1880-ban a magyar korona területén. V-ik rész. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. 102 hullócsillag kisugárzási pont, levezetve 518 megfigyelésből, melyek a magyar korona területén 1879. és 1880-ban tétettek. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Új villámzáró vagy nyitókészülék normálórán, és a Jürgenssen-féle óraszerkezet. *Konkoly Miklóstól.* Egy képtáblával. — IX. szám. Adatok Jupiter forgási elemeihez. *Dr. Kobold Ármintól.* — X. szám. A Hamilton-féle rendszerek és az elsőrendü partialis differentiálegyenletek általános elmélete. Székfoglaló értekezés. *König Gyulától.* — XI. szám. A hadtudomány viszonya a többi tudományokhoz. *Kápolnai Pauer Istvántól.* Székfoglaló értekezés. — XII. szám. Egy negyedrendü felületről. *Hunyady Jenőtől.*

Kilenczedik kötet.

I. szám. Astrophisikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. (Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — II. szám. Az ó-gyallai csillagvizsgáló földrajzi szélessége. *Dr. Lakits Ferencztől.* — III. szám. A herényi astrophysikai observatorium leirása, és az abban tett megfigyelések 1881-ben. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. szám. Napfoltok és a nap felületének megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — V. szám. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón. *Konkoly Miklóstól.* — VI. szám. Hullócsillagok megfigyelése 1881-ben. *Konkoly Miklóstól.* — VII. szám. Adatok Jupiter és Mars physikájához, az 1881. évi megfigyelésekből. (III. rész. Három táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. szám. Az üstökösök vegytani alkotása. *Konkoly Miklóstól.* — IX. szám. Az 1871—1880. években, Magyarországban megfigyelt hullócsillagok pályaelemei. *Kövesligethy Radótól.* — X. szám. Néhány determináns-egyenletről. *Hunyady Jenőtől.* — XI. Perspectiv helyzetű alakzatokról *Dr. Klug Lipóttól.* — XII. szám. Az elhajlott fény intenzitásának vizsgálata. (A math. és természettudományi állandó bizottság segélyezésével készült dolgozat. Tizenkét ábrával a szöveg között.) *Dr. Fröhlich Izortól.* — XIII. szám. Az algebrai egyenletek elméletéhez. *König Gyulától.*

Tizedik kötet.

I. A nap felületének megfigyelése 1882-ben. *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések 1882-ben. *a)* A Wells-üstökös szinképe. *b)* A szeptemberi nagy üstökös szinképe. *c)* 9 Meteor szinképe. *d)* 115 állócsillag spectruma. *e)* Coloremetricus megfigyelések. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — IV. Egy uj reversio-spectroscop s annak használata. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — V. Az ó-gyallai csillagvizsgálón eszközölt csillagászati megfigyelések eredménye. 1882. *Konkoly Miklóstól.* — VI. Néhány szó az üstökösök vegytani alkotásáról, összehasonlitva a meteoritekkel. *Konkoly Miklóstól.* — VII. Egy uj szerkezetü spectroscop. (Egy táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Astrophysikai megfigyelések a herényi observatoriumon, 1882. (Egy táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. Adatok Jupiter és Mars bolygók physikájához. (Három táblával.) *Gothard Sándortól.* — X. Egy uj spectroscop. (Egy táblarajzzal.) *Gothard Jenőtől.* — XI. Astrophysikai megfigyelések 1883. (Egy táblával.) I. rész. *a)* γ Cassiopejae spectruma. *b)* α Ursae minoris spectruma. *l)* A Swift üstökös spectruma. *d)* A Brooks üstökös spectruma. *e)* Colorimetricus megfigyelése 65 állócsillagnak. *Konkoly Miklóstól.*

Tizenegyedik kötet.

I. Astrophysikai megfigyelések 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. (II-ik rész, 3 tábla.) *Konkoly Miklóstól.* — II. A nap felületének megfigyelése 1883-ban, az ó-gyallai csillagdán. *Konkoly Miklóstól.* — III. Hullócsillagok megfigyelése a magyar korona területén 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — IV. 615 állócsillag spectruma. A déli öv átkutatásának I. része. *Konkoly Miklóstól.* — V. Megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon 1883-ban. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VI. A Pons-Brooks üstökös spectroscopicus megfigyelése a herényi astrophysikai observatoriumon. (Két táblával.) *Gothard Jenőtől.* — VII. Csillagászati megfigyelések az ó-gyallai csillagdán 1883-ban. *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Előleges vizsgálatok néhány szénhydrogén-gáz spectrumán, spectroscoppal és spectralphotometerrel. (3 táblával s 2 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — IX. Adatok Bolyai Farkas életrajzához. *Szily Kálmántól.* — X. A herényi astrophysikai observatorium sarkmagasságának meghatározása. *Gothard Jenőtől.*

Tizenkettedik kötet.

I. A napfoltok és a nap felületének megfigyelése az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (1 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — II. Astrophysikai megfigyelések az ó-gyallai csillagvizsgálón 1884-ben. (4 fametszettel.) *Konkoly Miklóstól.* — III. Az 1884. évi megfigyelések a herényi astrophysikai observatoriumon. (2 ábra és 3 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IV. Hulló-csillagok megfigyelése a m. korona területén 1884-ben. 26 radiatio ponttal. *Konkoly Miklóstól.* — V. 615 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.* — VI. A napfoltok gyakoriassága 1872-től 1884 végéig. (2 kőnyomatu táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VII. Adatok Jupiter physikájához. (2 táblával.) *Konkoly Miklóstól.* — VIII. Tanulmányok az égitestek photographálása terén. (1 táblával.) *Gothard Jenőtől.* — IX. A Haynald-observatoriumban 1880—1884-ben megfigyelt napfoltok. *Hüninger Adolftól.* — X. Az 1873. VII. sz. Coggia-Winnecke-féle üstökös pályaszámitása. *Schulhof Lipóttól.* — XI. A folytonos spectrumok elmélete. *Kövesligethi Radótól.*

Tizenharmadik kötet.

I. A földnehézség meghatározása Budapesten 1885-ben (4 táblával). *Gruber Lajostól.* — II. Hulló csillagok megfigyelése a magyar korona területén 1885-ben. *Konkoly Miklóstól.* — III. 855 állócsillag spectruma. *Konkoly Miklóstól.*

FRANKLIN-TARSULAT NYOMDÁJA.